Chapitre 1:
Cinétique

Plan

I. Opérateur linéaire d'Inertie en un point

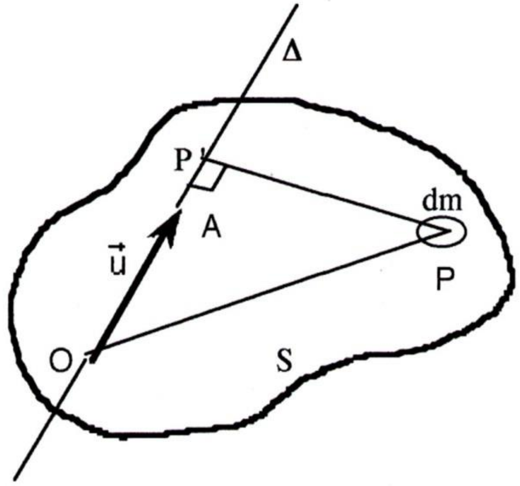
II. Torseur Cinétique et Torseur Dynamique

III. Energie Cinétique

I – Opérateur linéaire d'Inertie en un point

1) Moment d'Inertie d'un solide par rapport à une droite

- soit Σ un système matériel et Δ une droite. P appartenant à Σ et P' est sa projection orthogonale sur Δ.

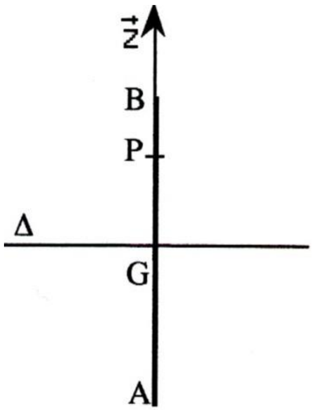


On appelle moment d'inertie de Σ par rapport à Δ le nombre positif noté $I_\Delta(\Sigma)$ défini par :

$$I_\Delta(\Sigma) = \int_S \overrightarrow{PP'}^2 \, dm$$

Exemple : soit une barre homogène AB de longueur 2a, de milieu G.

Soit P un point *courant* de AB. Soit : $\overrightarrow{GP} = z\vec{z}$



La projection de P sur Δ est le point G, d'où :

$$\overrightarrow{PP'}^2 = z^2$$

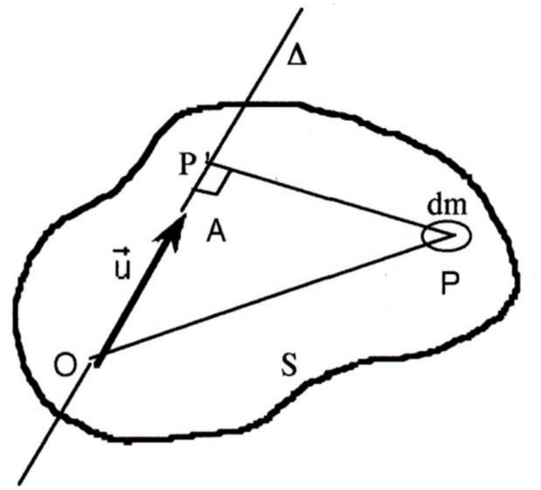
D'autre part : $dm = \rho\, dz$ où : ρ est la masse linéique de la barre.

$$I_\Delta(\Sigma) = \int_S \overrightarrow{PP'}^2 dm = \int_S z^2 \rho dz = \rho \int_{-a}^{a} z^2 dz$$

$$\Rightarrow I_\Delta(\Sigma) = \rho \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-a}^{a} = 2\rho \frac{a^3}{3} = \underbrace{2a\rho}_{m} \frac{a^2}{3}$$

$$I_\Delta(\Sigma) = m \frac{a^2}{3}$$

- soit O un point de Δ et $\vec{u}$ un vecteur porté par Δ. Considérons le triangle OAP où A désigne l'extrémité du vecteur $\left(O,\vec{u}\right)$



On démontre que $I_{\Delta}\left(\Sigma\right)$ peut s'écrire sous la forme suivante

$$I_{\Delta}\left(\Sigma\right)=\vec{u}.\left[\int_{S}\left(\overrightarrow{OP}\wedge\vec{u}\right)\wedge\overrightarrow{OP}\,dm\right]$$

2) Opérateur linéaire d'Inertie en un point

- On appelle opérateur linéaire d'inertie en un point O de S, à l'instant t, l'application qui, à tout vecteur $\vec{u}$ de E noté $\mathscr{I}(O,S)\vec{u}$ défini par :

$$\mathscr{I}(O,S)\vec{u} = \int_S \left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}\right) \wedge \overrightarrow{OP}\, dm$$

- Propriétés :

i) l'opérateur d'inertie en O d'un ensemble de solides est égale à la somme des opérateurs d'inertie en O de chacun des solides

$$\boxed{\mathscr{I}\left(O, \cup_{j=1,n} S_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathscr{I}\left(O, S_j\right)}$$

ii) l'opérateur d'inertie est un opérateur symétrique :

$$\boxed{\vec{u}.\mathscr{I}(O,S)\vec{v} = \vec{v}.\mathscr{I}(O,S)\vec{u}}$$

iii) l'opérateur d'inertie en O étant symétrique, sa matrice dans toute base orthonormée directe b est symétrique. On l'écrit classiquement comme suit :

$$\boxed{II(O,S,b)=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}}$$

soit x, y et z les coordonnées cartésiennes de P dans le repère de base b.
En appliquant la formule $\mathscr{I}(O,S)\vec{u}=\int_S \left(\overrightarrow{OP}\wedge\vec{u}\right)\wedge\overrightarrow{OP}\,dm$ à $\vec{u}=\vec{x},\vec{u}=\vec{y}\ et\ \vec{u}=\vec{z}$
on obtient :

$$\boxed{II(O,S,b)=\begin{bmatrix} \int_S\left(y^2+z^2\right)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ -\int_S xydm & \int_S\left(x^2+z^2\right)dm & -\int_S yzdm \\ -\int_S xzdm & -\int_S yzdm & \int_S\left(x^2+y^2\right)dm \end{bmatrix}}$$

A, B et C sont les moments d'inertie de S respectivement par rapport aux axes $(O,\vec{x}),(O,\vec{y})\ et\ (O,\vec{z})$.
D, E et F sont les produits d'Inertie.

Interprétation physique : A quantifie la répartition des masses autour de l'axe de rotation. Il représente la répugnance d'un solide en rotation à modifier sa vitesse.

A partir de cette expression, on notera que le moment d'inertie est d'autant plus important que les masses sont éloignés de l'axe.

iv) l'opérateur d'inertie d'un système S en son centre de masse ou d'inertie G est appelé opérateur central d'inertie.

3) Relation entre l'opérateur d'Inertie en O et au centre de masse G

on a : $$\mathcal{I}(O,S)\vec{u} = \int_S \left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}\right) \wedge \overrightarrow{OP}\, dm$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}(O,S)\vec{u} = \int_S \left[\left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}\right) \wedge \vec{u}\right] \wedge \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}\right) dm$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}(O,S)\vec{u} = \int_S \left(\overrightarrow{OG} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{GP} \wedge \vec{u}\right) \wedge \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}\right) dm$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}(O,S)\vec{u} = \int_S \left(\overrightarrow{OG} \wedge \vec{u}\right) \wedge \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}\right) dm + \int_S \left(\overrightarrow{GP} \wedge \vec{u}\right) \wedge \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}\right) dm$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}(O,S)\vec{u} = \int_S \left(\overrightarrow{OG} \wedge \vec{u}\right) \wedge \overrightarrow{OG} dm + \int_S \left(\overrightarrow{OG} \wedge \vec{u}\right) \wedge \overrightarrow{GP} dm$$
$$+ \int_S \left(\overrightarrow{GP} \wedge \vec{u}\right) \wedge \overrightarrow{OG} dm + \int_S \left(\overrightarrow{GP} \wedge \vec{u}\right) \wedge \overrightarrow{GP} dm$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}(O,S)\vec{u} = \left(\overrightarrow{OG} \wedge \vec{u}\right) \wedge \overrightarrow{OG} \int_S dm + \left(\overrightarrow{OG} \wedge \vec{u}\right) \wedge \int_S \overrightarrow{GP} dm$$
$$+ \left[\left(\int_S \overrightarrow{GP} dm\right) \wedge \vec{u}\right] \wedge \overrightarrow{OG} + \int_S \left(\overrightarrow{GP} \wedge \vec{u}\right) \wedge \overrightarrow{GP} dm$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}(O,S)\vec{u} = \left(\overrightarrow{OG}\wedge\vec{u}\right)\wedge\overrightarrow{OG}\underbrace{\int_S dm}_{m(S)} + \left(\overrightarrow{OG}\wedge\vec{u}\right)\wedge\underbrace{\int_S \overrightarrow{GP}dm}_{\vec{0}}$$

$$+\left[\left(\underbrace{\int_S \overrightarrow{GP}dm}_{\vec{0}}\right)\wedge\vec{u}\right]\wedge\overrightarrow{OG} + \int_S\left(\overrightarrow{GP}\wedge\vec{u}\right)\wedge\overrightarrow{GP}dm$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}(O,S)\vec{u} = m(S)\left(\overrightarrow{OG}\wedge\vec{u}\right)\wedge\overrightarrow{OG} + \int_S\left(\overrightarrow{GP}\wedge\vec{u}\right)\wedge\overrightarrow{GP}dm$$

$$\boxed{\mathcal{I}(O,G\{m(S)\})\vec{u}} \qquad \boxed{\mathcal{I}(G,S)\vec{u}}$$

cette relation étant vraie quelque soit $\vec{u}$, on en déduit le théorème de Koenigs relatif à l'opérateur d'inertie :

$$\mathcal{I}(O,S) = \mathcal{I}(O,G\{m(S)\}) + \mathcal{I}(G,S)$$

<u>cas particulier</u> : $\vec{u}.\mathcal{I}(O,S)\vec{u} = \vec{u}.\mathcal{I}(O,G\{m(S)\})\vec{u} + \vec{u}.\mathcal{I}(G,S)\vec{u}$

ou encore, $I_\Delta(S) = m(S)d^2 + I_{\Delta G}(S)$ théorème de huyghens

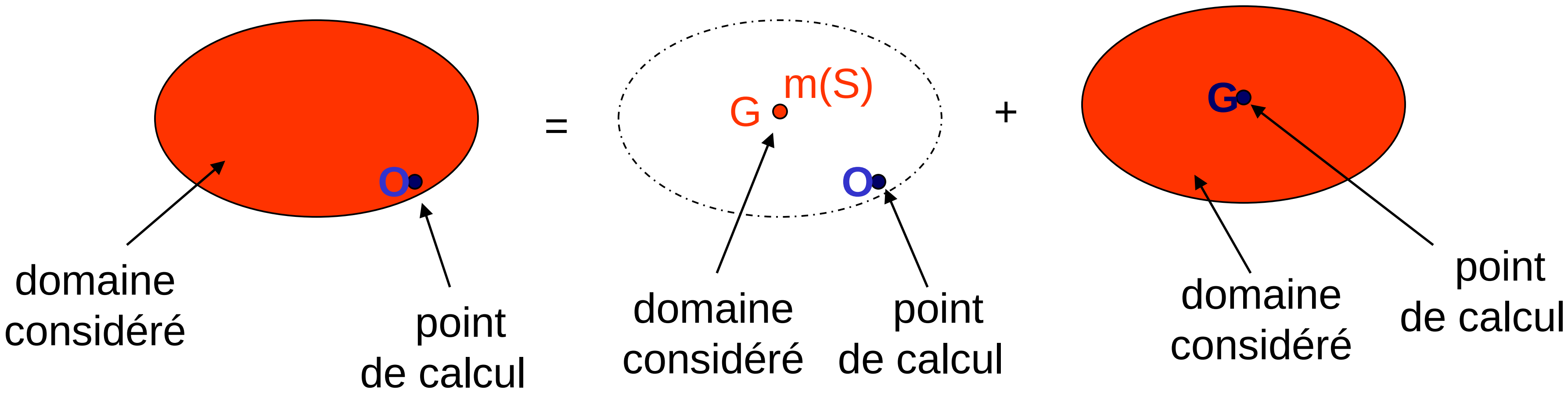
Retour sur le théorème de Koenigs :

$$\mathcal{J}(O,S)=\mathcal{J}(O,G\{m(S)\})+\mathcal{J}(G,S)$$

ou encore : $$II(O,S,b)=II(O,G\{m(S)\},b)+II(G,S,b)$$

Matrice d'inertie du **solide S**
au point **G**
(cf. Documents : donnée)

Matrice d'inertie d'une
masse concentrée m(S) en G
au point **O**
(A calculer)



calcul de $II(O,G\{m(S)\},b)$??

$$\boxed{II(O,G\{m(S)\},b)=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}}$$

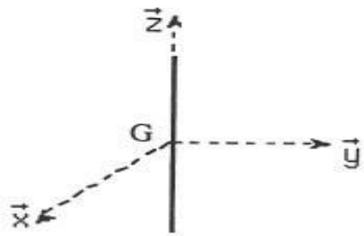
$$\left(\overrightarrow{OG}\right)_b = \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix}$$ coordonnées <u>constantes</u>

$$II(O,G\{m(S)\},b)=\begin{bmatrix} A=\int_S \left(\bar{y}^2+\bar{z}^2\right)dm & -\int_S \bar{x}\bar{y}dm & -\int_S \bar{x}\bar{z}dm \\ -\int_S \bar{x}\bar{y}dm & \int_S \left(\bar{x}^2+\bar{z}^2\right)dm & -\int_S \bar{y}\bar{z}dm \\ -\int_S \bar{x}\bar{z}dm & -\int_S \bar{y}\bar{z}dm & \int_S \left(\bar{x}^2+\bar{y}^2\right)dm \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow II(O,G\{m(S)\},b)=\begin{bmatrix} A=m\left(\bar{y}^2+\bar{z}^2\right) & -m\bar{x}\bar{y} & -m\bar{x}\bar{z} \\ -m\bar{x}\bar{y} & m\left(\bar{x}^2+\bar{z}^2\right) & -m\bar{y}\bar{z} \\ -m\bar{x}\bar{z} & -m\bar{y}\bar{z} & m\left(\bar{x}^2+\bar{y}^2\right) \end{bmatrix}$$

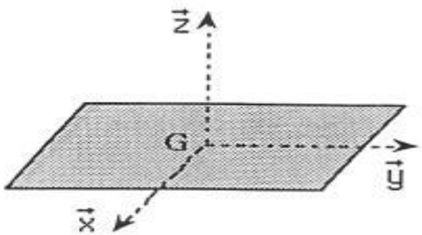
4) Matrices d’Inertie de solides homogènes usuels

1 Tige rectiligne de longueur 2 a



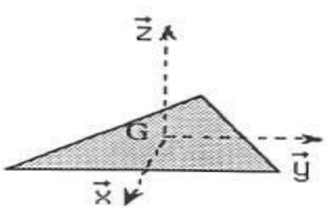
$$\mathbb{I}(G, S) = \begin{pmatrix} m\frac{a^2}{3} & & \\ & m\frac{a^2}{3} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

2 Plaque rectangulaire : - a ≤ x ≤ a , - b ≤ y ≤ b



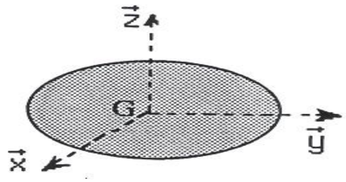
$$\mathbb{I}(G, S) = \begin{pmatrix} m\frac{b^2}{3} & & \\ & m\frac{a^2}{3} & \\ & & m\frac{(a^2 + b^2)}{3} \end{pmatrix}$$

3 Plaque ayant la forme d'un triangle équilatéral de côté 2 a



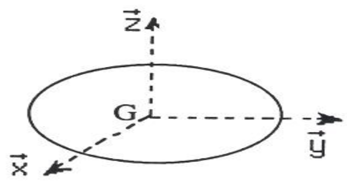
$$\mathbb{I}(G, S) = \begin{pmatrix} m\frac{a^2}{6} & & \\ & m\frac{a^2}{6} & \\ & & m\frac{a^2}{3} \end{pmatrix}$$

4 Disque d'axe ($G,\vec{z}$) et de rayon R



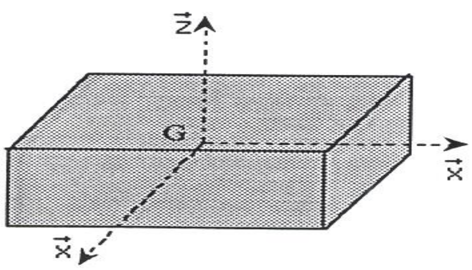
$$\mathbb{I}(G,S)=\begin{pmatrix} m\frac{R^2}{4} & & \\ & m\frac{R^2}{4} & \\ & & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}$$

5 Anneau d'axe ($G,\vec{z}$) et de rayon R



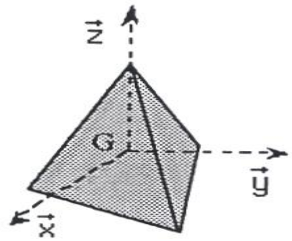
$$\mathbb{I}(G,S)=\begin{pmatrix} m\frac{R^2}{2} & & \\ & m\frac{R^2}{2} & \\ & & mR^2 \end{pmatrix}$$

6 Parallélépipède droit plein :
$-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$, $-c \le z \le c$



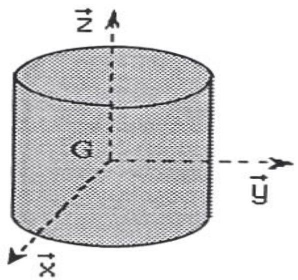
$$\mathbb{I}(G,S)=\begin{pmatrix} m\frac{(b^2+c^2)}{3} & & \\ & m\frac{(c^2+a^2)}{3} & \\ & & m\frac{(a^2+b^2)}{3} \end{pmatrix}$$

7 **Tétraèdre régulier plein de côté 2 a**



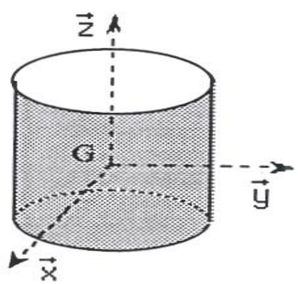
$$\mathbb{I}(G, S) = \begin{pmatrix} m\frac{a^2}{5} & & \\ & m\frac{a^2}{5} & \\ & & m\frac{a^2}{5} \end{pmatrix}$$

8 **Cylindre de révolution plein de rayon R et de hauteur h**



$$\mathbb{I}(G, S) = \begin{pmatrix} m\frac{(3R^2 + h^2)}{12} & & \\ & m\frac{(3R^2 + h^2)}{12} & \\ & & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}$$

9 **Surface cylindrique de révolution de rayon R et de hauteur h**



$$\mathbb{I}(G, S) = \begin{pmatrix} m\frac{(6R^2 + h^2)}{12} & & \\ & m\frac{(6R^2 + h^2)}{12} & \\ & & mR^2 \end{pmatrix}$$

Exemple d'Application : matrice d'Inertie d'un Touret en son centre de masse (Exercice I du TD 3)

Un touret (T) servant à enrouler des câbles est modélisé par :

- une surface cylindrique homogène (C) de centre de masse O, d'axe $(O, \vec{z})$, de rayon de cercle de base R, de hauteur 2R et de masse m.

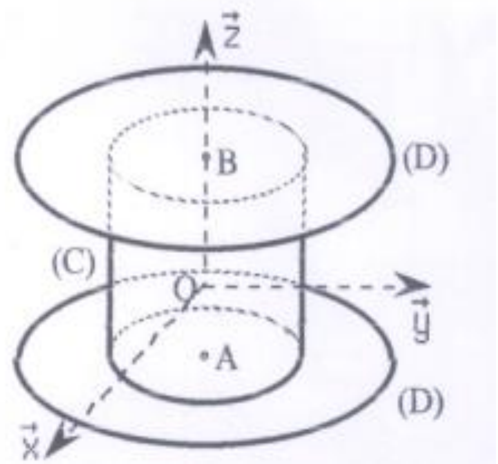
- deux disques homogènes identiques (D) de rayon 2R et de masse m dont les axes coïncident avec l'axe $(O, \vec{z})$ de (C).

1- Écrire le matrice d'inertie de (C) en O.

2- Écrire le matrice d'inertie de (D) en O.

3- En déduire la matrice d'inertie de (T) en O .

On écrira les matrices d'inertie sur la base orthonormée directe b :$\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$

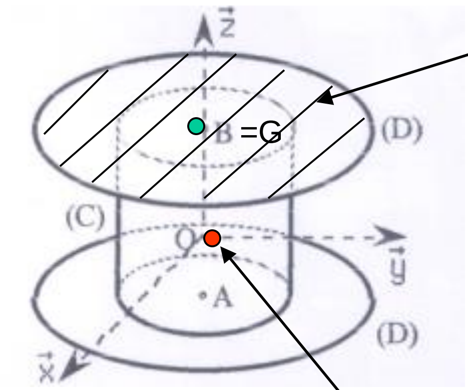


R 3 : $\mathbb{I}(O, T, b) = \dfrac{m R^2}{6}\begin{pmatrix} 29 & & \\ & 29 & \\ & & 30 \end{pmatrix}$

Réponse à la question 2) : Calcul de la matrice d'inertie de (D) en O.

$$II(O,(D),b)?$$

Solide considéré



Point de calcul

Le point de calcul n'est pas confondu avec le centre de masse G

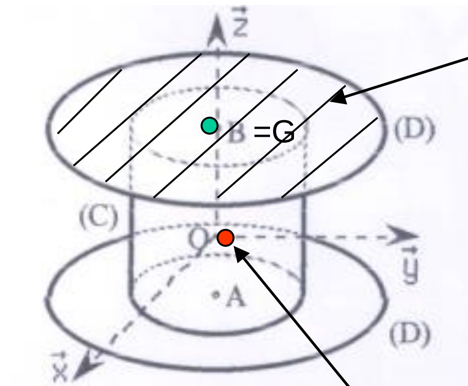
⇨ il faut utiliser le théorème de Koënigs :

$$II(O,S,b) = II(O,G\{m(S)\},b) + II(G,S,b)$$

Matrice d'inertie du **solide S** au point **G** (cf. Documents : donnée)

Matrice d'inertie d'une **masse concentrée m(S) en G** au point **O** (A calculer)

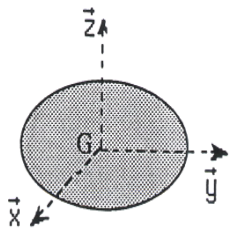
$$II(O,S,b) = II(O,G\{m(S)\},b) + II(G,S,b)$$



$$\left(\overrightarrow{OG}\right)_b : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$II(O,G\{m(S)\},b) = \begin{pmatrix} mR^2 & & \\ & mR^2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$



$$\mathbb{I}(G,S) = \begin{pmatrix} m\frac{R^2}{4} & & \\ & m\frac{R^2}{4} & \\ & & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}$$

Application à notre cas : Faire attention à : 1)axes, 2)masse, 3)dimensions

$$II(G,S,b) = \begin{pmatrix} \frac{m(2R)^2}{4} & & \\ & \frac{m(2R)^2}{4} & \\ & & \frac{m(2R)^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mR^2 & & \\ & mR^2 & \\ & & 2mR^2 \end{pmatrix}$$

Enfin, $$II(O,S,b) = \begin{pmatrix} mR^2 & & \\ & mR^2 & \\ & & 2mR^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mR^2 & & \\ & mR^2 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = 2mR^2 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Fin 1ere séance

II – Torseur Cinétique et Torseur Dynamique

1) Introduction des Torseurs

a) Torseur Cinétique d'un système matériel (Σ)

Le torseur cinétique d'un système matériel Σ en mouvement par rapport à un espace $\mathscr{E}_0$ est le torseur associé à Σ et au champ de ses vitesses par rapport à $\mathscr{E}_0$.

Ce torseur est également appelé torseur des quantités de mouvement. Il est noté $\left[\mathscr{C}_0(\Sigma)\right]$

$$\left[\mathscr{C}_0(\Sigma)\right]_A : \begin{cases} \vec{R}_{0c}(\Sigma) \\ \vec{\sigma}_{0c}(A,\Sigma) \end{cases}$$

- $\vec{R}_{0c}(\Sigma)$ est la résultante cinétique donnée par : $\vec{R}_{0c}(\Sigma) = \int_S \vec{V}_0(P)\,dm$

- $\vec{\sigma}_{0c}(A,\Sigma)$ est le moment cinétique en A donné par : $\vec{\sigma}_{0c}(A,\Sigma) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}_0(P)\,dm$

b) Torseur Dynamique d'un système matériel (Σ)

Le torseur dynamique d'un système matériel Σ en mouvement par rapport à un espace $\mathscr{E}_0$ est le torseur associé à Σ et au champ de ses accélérations par rapport à $\mathscr{E}_0$.

Ce torseur est également appelé torseur des quantités d'accélération. Il est noté $\left[\mathscr{A}_0(\Sigma)\right]$

$$\left[\mathscr{A}_0(\Sigma)\right]_A : \begin{cases} \vec{R}_{0d}(\Sigma) \\ \vec{\delta}_{0d}(A,\Sigma) \end{cases}$$

- $\vec{R}_{0d}(\Sigma)$ est la résultante dynamique donnée par : $\vec{R}_{0d}(\Sigma) = \int_S \vec{\gamma}_0(P)\,dm$

- $\vec{\delta}_{0d}(A,\Sigma)$ est le moment dynamique en A donné par : $\vec{\delta}_{0c}(A,\Sigma) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\gamma}_0(P)\,dm$

c) Propriétés des Torseurs Cinétique et Dynamique

$$\left[\mathscr{V}_0\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\mathscr{V}_0(S_i)\right] \qquad \left[\mathscr{A}_0\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\mathscr{A}_0(S_i)\right]$$

2) Torseur Cinétique d'un Solide (S)

a) Résultante Cinétique :

A partir de la définition du centre de masse d'un système matériel on a :

$$m\overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OP}dm \quad \Rightarrow \frac{d_0}{dt}\left(m\overrightarrow{OG}\right) = \frac{d_0}{dt}\left(\int_S \overrightarrow{OP}dm\right) \quad \Rightarrow m\frac{d_0\left(\overrightarrow{OG}\right)}{dt} = \int_S \frac{d_0\left(\overrightarrow{OP}\right)}{dt}dm$$

$$\Rightarrow m\overrightarrow{V_0}(G) = \int_S \overrightarrow{V_0}(P)dm \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{R}_{0c}(S) = m\overrightarrow{V_0}(G)}$$

b) Moment Cinétique :

- au centre de masse G : $\overrightarrow{\sigma}_{0c}(G,S) = \int_S \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{V_0}(P)dm$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\sigma}_{0c}(G,S) = \int_S \overrightarrow{GP} \wedge \left(\overrightarrow{V_0}(G) + \overrightarrow{\Omega}_{0S} \wedge \overrightarrow{GP}\right)dm$$

$$= \int_S \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{V_0}(G)dm + \int_S \overrightarrow{GP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{0S} \wedge \overrightarrow{GP}\right)dm$$

$$= \underbrace{\left(\int_S \overrightarrow{GP}dm\right)}_{\boxed{\vec{0}}} \wedge \overrightarrow{V_0}(G) + \underbrace{\int_S \overrightarrow{GP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{0S} \wedge \overrightarrow{GP}\right)dm}_{\boxed{\mathcal{I}(G,S)\overrightarrow{\Omega}_{0S}}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}_{0c}(G,S) = \mathcal{I}(G,S)\overrightarrow{\Omega}_{0S}}$$

- supposons qu'il existe dans (S) un point fixe dans $\mathcal{R}_0$, soit C ce point :

$$\vec{\sigma}_{0c}(C,S)=\int_S \overrightarrow{CP}\wedge\vec{V}_0(P)dm \;\Rightarrow \vec{\sigma}_{0c}(C,S)=\int_S \overrightarrow{CP}\wedge\left(\cancel{\vec{V}_0(C)}+\vec{\Omega}_{0S}\wedge\overrightarrow{CP}\right)dm$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_{0c}(C,S)=\underbrace{\int_S \overrightarrow{CP}\wedge\left(\vec{\Omega}_{0S}\wedge\overrightarrow{CP}\right)dm}_{\boxed{\mathcal{J}(C,S)\vec{\Omega}_{0S}}}$$

$$\vec{\sigma}_{0c}(C,S)=\mathcal{J}(C,S)\vec{\Omega}_{0S}$$

- Pour un point quelconque lié à (S) ou pas, on utilise la formule de transport des moments en deux points d'un torseur :

$$\vec{\sigma}_{0c}(B)=\vec{\sigma}_{0c}(G)+\overrightarrow{BG}\wedge\vec{R}_{0c}$$

ou encore,

$$\boxed{\vec{\sigma}_{0c}(B)=\mathcal{J}(G,S)\vec{\Omega}_{0S}+m\overrightarrow{BG}\wedge\vec{V}_0(G)}$$

- On peut aussi écrire :

$$\boxed{\vec{\sigma}_{0c}(B)=\vec{\sigma}_{0c}(A)+\overrightarrow{BA}\wedge\vec{R}_{0c}}$$

2) Torseur Dynamique d'un Solide (S)

a) Résultante Dynamique :

On utilise le même raisonnement que pour le cas de la résultante cinétique,

$$\vec{R}_{0d}(S) = m\overrightarrow{\gamma_0}(G)$$

b) Moment Dynamique :

Partons de la définition du moment cinétique: $\vec{\sigma}_{0c}(B,S) = \int_S \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{V_0}(P)dm$

$$\Rightarrow \frac{d_0}{dt}\left(\vec{\sigma}_{0c}(B,S)\right) = \int_S \frac{d_0}{dt}\left(\overrightarrow{BP}\right) \wedge \overrightarrow{V_0}(P)dm + \int_S \overrightarrow{BP} \wedge \frac{d_0}{dt}\left(\overrightarrow{V_0}(P)\right)dm$$

$$= \int_S \left(\overrightarrow{V_0}(P) - \overrightarrow{V_0}(B)\right) \wedge \overrightarrow{V_0}(P)dm + \int_S \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{\gamma_0}(P)dm$$

$$= -\overrightarrow{V_0}(B) \wedge \int_S \overrightarrow{V_0}(P)dm + \int_S \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{\gamma_0}(P)dm$$

$$= -\overrightarrow{V_0}(B) \wedge \vec{R}_{0c}(S) + \vec{\delta}_{0d}(B,S)$$

$$= -m\overrightarrow{V_0}(B) \wedge \overrightarrow{V_0}(G) + \vec{\delta}_{0d}(B,S)$$

$$\vec{\delta}_{0d}(B) = \frac{d_0}{dt}\left(\vec{\sigma}_{0c}(B)\right) + m\overrightarrow{V_0}(B) \wedge \overrightarrow{V_0}(G)$$

$$\vec{\delta}_{0d}(B)=\frac{d_0}{dt}\left(\vec{\sigma}_{0c}(B)\right)+m\vec{V}_0(B)\wedge\vec{V}_0(G)$$

Cas particuliers :

- si B est le centre de masse G : $\vec{\delta}_{0d}(G)=\frac{d_0}{dt}\left(\vec{\sigma}_{0c}(G)\right)+m\vec{V}_0(G)\wedge\vec{V}_0(G)$

$$\boxed{\vec{\delta}_{0d}(G)=\frac{d_0}{dt}\left(\vec{\sigma}_{0c}(G)\right)}$$

- si B est un point C lié à (S) et fixe dans $\mathcal{E}_0$: $\vec{\delta}_{0d}(C)=\frac{d_0}{dt}\left(\vec{\sigma}_{0c}(G)\right)+m\vec{V}_0(C)\wedge\vec{V}_0(G)$

$$\boxed{\vec{\delta}_{0d}(C)=\frac{d_0}{dt}\left(\vec{\sigma}_{0c}(C)\right)}$$

B point quelconque : formule de transport des moments

$$\vec{\delta}_{0d}(B)=\vec{\delta}_{0d}(A)+\overrightarrow{BA}\wedge\vec{R}_{0d}$$

III – Énergie Cinétique

1) Introduction de l'Énergie Cinétique

- on appelle énergie cinétique d'un système matériel Σ en mouvement par rapport à un espace $\mathscr{E}_0$ l'intégrale suivante :

$$E_{0c}(\Sigma) = \tfrac{1}{2}\int_S \overrightarrow{V_0}^2(P)\,dm$$

- propriétés :

$$E_{0c}\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E_{0c}(S_i)$$

2) Énergie Cinétique d'un Solide (S)

$$2E_{0c}(S) = \int_S \overrightarrow{V_0}^2(P)\,dm \quad = \int_S \left(\overrightarrow{V_0}(G) + \vec{\Omega}_{0S} \wedge \overrightarrow{GP}\right)^2 dm$$

$$= \int_S \left(\left(\overrightarrow{V_0}(G)\right)^2 + 2\overrightarrow{V_0}(G).\left(\vec{\Omega}_{0S} \wedge \overrightarrow{GP}\right) + \left(\vec{\Omega}_{0S} \wedge \overrightarrow{GP}\right)^2\right) dm$$

$$2E_{0c}(S)=\int_S\left(\left(\overrightarrow{V_0}(G)\right)^2+2\overrightarrow{V_0}(G).\left(\vec{\Omega}_{0S}\wedge\overrightarrow{GP}\right)+\left(\vec{\Omega}_{0S}\wedge\overrightarrow{GP}\right)^2\right)dm$$

$$=\int_S\left(\overrightarrow{V_0}(G)\right)^2dm+2\overrightarrow{V_0}(G).\int_S\vec{\Omega}_{0S}\wedge\overrightarrow{GP}dm+\int_S\left(\vec{\Omega}_{0S}\wedge\overrightarrow{GP}\right)^2dm+$$

$$=m\left(\overrightarrow{V_0}(G)\right)^2+2\overrightarrow{V_0}(G).\left(\vec{\Omega}_{0S}\wedge\cancel{\int_S\overrightarrow{GP}dm}\right)+\int_S\left(\vec{\Omega}_{0S}\wedge\overrightarrow{GP},\vec{\Omega}_{0S},\overrightarrow{GP}\right)dm$$

$$\text{or}\int_S\left(\vec{\Omega}_{0S}\wedge\overrightarrow{GP},\vec{\Omega}_{0S},\overrightarrow{GP}\right)dm=\int_S\left(\vec{\Omega}_{0S},\overrightarrow{GP},\vec{\Omega}_{0S}\wedge\overrightarrow{GP}\right)dm\quad=\vec{\Omega}_{0S}.\int_S\overrightarrow{GP}\wedge\left(\vec{\Omega}_{0S}\wedge\overrightarrow{GP}\right)dm$$

$$\boxed{\mathscr{I}(G,S)\vec{\Omega}_{0S}}$$

$$\Rightarrow 2E_{0c}(S)=m\left(\overrightarrow{V_0}(G)\right)^2+\vec{\Omega}_{0S}.\mathscr{I}(G,S)\vec{\Omega}_{0S}$$

$$E_{0c}(S)=\frac{1}{2}m\left(\overrightarrow{V_0}(G)\right)^2+\frac{1}{2}\vec{\Omega}_{0S}.\mathscr{I}(G,S)\vec{\Omega}_{0S}$$

S'il existe dans S un point fixe dans $\mathscr{E}_0$, Soit C ce point, on démontre que :

$$\boxed{E_{0c}(S)=\frac{1}{2}\vec{\Omega}_{0S}.\mathscr{I}(C,S)\vec{\Omega}_{0S}}$$ (même démonstration que plus haut)

Fin du Cours de CINETIQUE