Chapitre 2

Théorèmes généraux de la dynamique

Plan

I. Rappels

II. Théorèmes généraux de la Dynamique

1. Principe fondamental de la dynamique (PFD)
2. Théorème des Inter-efforts
3. Théorème de la résultante dynamique (TRD)
4. Théorème du moment dynamique (TMD)

III. Résolution d’un problème de dynamique

1. Inconnues d’un problème de dynamique
2. Équations du mouvement
3. Mise en équations
4. Méthode de résolution des équations du mouvement

IV. Exemple d’Application

II- Théorème généraux de la dynamique

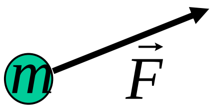
1. Principe fondamental de la dynamique

a) Énoncé

Il existe au moins un espace-temps dit <u>galiléen</u> ou absolu tel que, dans cet espace-temps pour tout système matériel et à tout instant, le torseur dynamique est égal au torseur des efforts extérieurs :

$$\left\lfloor \mathcal{A}_{\mathcal{G}}(\Sigma) \right\rfloor = \left\lfloor \mathcal{F}_{\bar{\Sigma}\to\Sigma} \right\rfloor$$

b) Application du PFD au point matériel

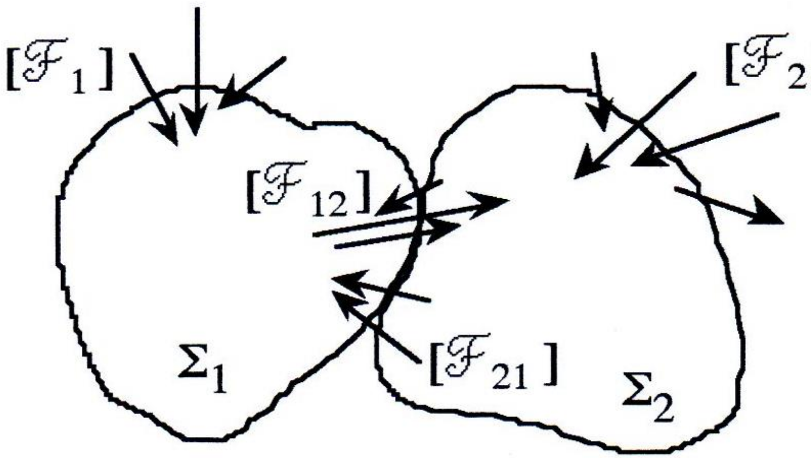


le torseur des efforts extérieurs est un glisseur : $\left(P, \vec{F}\right)$

$\Longrightarrow$ le PFD donne : $\vec{F} = m\vec{\gamma}_g(P)$

2. Théorème des Inter-efforts

Comme en STATIQUE, le torseur des efforts exercés par Σ_1 sur Σ_2 est <u>opposé</u> au torseur des efforts exercés par Σ_2 sur Σ_1.



$$\left[\mathcal{F}_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2}\right] = -\left[\mathcal{F}_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1}\right]$$

3. Théorème de la résultante dynamique (TRD)

Le PFD au point A s'écrit : $\left\lfloor \mathscr{A}_{\mathscr{g}}(\Sigma) \right\rfloor_A = \left\lfloor \mathscr{F}_{\bar{\Sigma}\to\Sigma} \right\rfloor_A$

=> La résultante des efforts extérieurs est égale à la résultante dynamique

$$\boxed{\vec{F}_{\bar{\Sigma}\Sigma} = m(\Sigma)\vec{\gamma}_g(G)}$$

Cette équation <u>vectorielle</u> fournit, par projection sur les vecteurs de la base :

- ✓ 2 équations <u>scalaires</u> (problème plan)
- ✓ 3 équations <u>scalaires</u> (problème3D)

4. Théorème du moment dynamique (TMD)

Le PFD au point A s'écrit : $\left\lfloor \mathscr{A}_{\mathscr{g}}(\Sigma) \right\rfloor_A = \left\lfloor \mathscr{F}_{\bar{\Sigma}\to\Sigma} \right\rfloor_A$

=> Le moment des efforts extérieurs au point A est égale au moment dynamique au même point :

$$\boxed{\vec{\mathrm{M}}\left(A, \mathscr{F}_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}\right) = \vec{\delta}_g(A, \Sigma)}$$

Soit : $\vec{\mathrm{M}}\left(C, \mathscr{F}_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}\right) = \dfrac{d_g\vec{\sigma}_g(C,\Sigma)}{dt}$ Si C fixe par rapport à Rg

Soit : $\vec{\mathrm{M}}\left(G, \mathscr{F}_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}\right) = \dfrac{d_g\vec{\sigma}_g(G,\Sigma)}{dt}$ Si G est le centre de masse de (Σ)

Cette équation vectorielle fournit, par projection sur les vecteurs de la base :

- ✓ 1 équation scalaire (problème plan)
- ✓ 3 équations scalaires (problème3D)

III- Résolution d’un problème de dynamique

1. Inconnues d’un problème de dynamique

Avant d’écrire les équations provenant des théorèmes généraux il faut dénombrer et dénommer les inconnues qui sont :

- ✓ des paramètres de position (inconnues cinématiques)
- ✓ des composantes des efforts de liaison (inconnues sthéniques)

Le problème de dynamique sera d’autant plus facile à résoudre que le nombre d’inconnues sera plus petit. Pour ce faire on peut envisager de :

- ✓ Réduire le nombre d’inconnues cinématiques en tenant compte des liaisons imposés aux différents solides du système étudié.
- ✓ Réduire le nombre d’inconnues sthéniques en tenant compte de la nature des liaisons (sans frottement…).

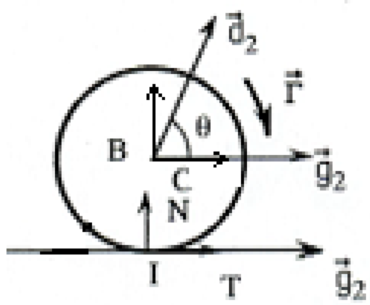
Si nombre d’équations = nombre d’inconnues. Le problème est bien posé.

2. Équations du mouvement

Définition : Une équation de mouvement est une équation scalaire faisant intervenir les caractéristiques du système à étudier (géométrie, masses, matrices d'inertie), les inconnues cinématiques et leurs dérivées par rapport au temps ainsi que les inconnues sthéniques).

Exemple :

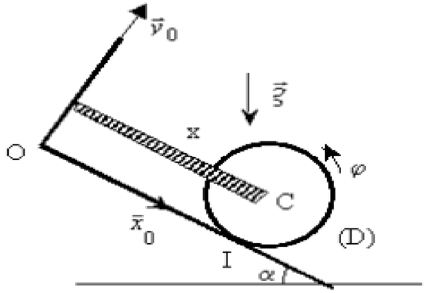
$$\Gamma + aT = m\frac{a^2}{2}\ddot{\theta}$$



Remarque : Le choix des équations à écrire dépend de la nature du problème posé. Par exemple, si on ne s'intéresse qu'au mouvement d'un système matériel sous l'action d'efforts donnés, on s'arrangera pour écrire des équations du mouvement qui ne font pas intervenir d'inconnues sthéniques.

Exemple :

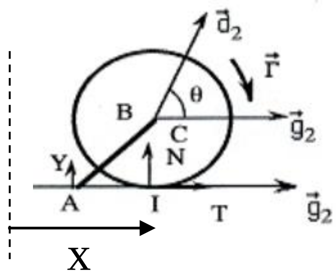
$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = \frac{2g}{3}\sin\alpha$$



3. Mise en équations

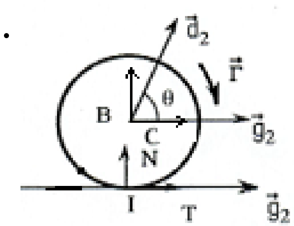
Pour écrire ces équations on procède de la manière suivante :

- ✓ On Isole le système matériel étudié et on lui applique le TRD et le TMD en un point judicieusement choisi. Par projection sur des vecteurs de base appropriés. On obtient 6 équations (3D) ou 3 équations (cas Plan).



$$TRD :\Rightarrow 2 \text{ équations}$$
$$TMD \text{ en } C :\Rightarrow 1 \text{ équation}$$

- ✓ Si on n'as pas autant d'équations que d'inconnues, on isole un sous-système et on lui applique les théorèmes généraux appropriés. Au besoin on renouvelle la manip.



$$TMD :\Rightarrow 1 \text{ équation}$$

- ✓ On obtient d'autres équation en écrivant la CRSG : $\dot{x} + a\dot{\theta} = 0$

4. Méthode de résolution et équations du mouvement

Les inconnues sthéniques dépendent des paramètres de position (inconnues cinématiques)

⇨ il faut commencer par déterminer ces inconnues :

- ✓ soit en écrivant directement des équations du mouvement font pas intervenir d'inconnues sthéniques.
- ✓ soit en combinant les équations du mouvement afin d'éliminer les inconnues sthéniques.

☞ On obtient 2 groupes d'équations :

- ✓ Un groupe où n'apparaissent que les inconnues cinématiques (équations différentielles du 2nd degré)
- ✓ Un groupe où interviennent les inconnues cinématiques et sthéniques.

Lorsque les inconnues cinématiques sont déterminées, le second groupe d'équations permet d'en déduire les inconnues sthéniques.

Fin… … …