



Ecole Supérieure d'Ingénieurs Léonard de Vinci

Travaux Dirigés de mécanique Générale dynamique / Année 1 - Semestre 2

Ecole Supérieure d'Ingénieurs Léonard de Vinci

MECANIQUE GENERALE DYNAMIQUE

TRAVAUX DIRIGES

Enseignant Responsable : M. GUERICH, M. HAMED

mohamed.guerich@devinci.fr Mohamed.hamed@devinci.fr

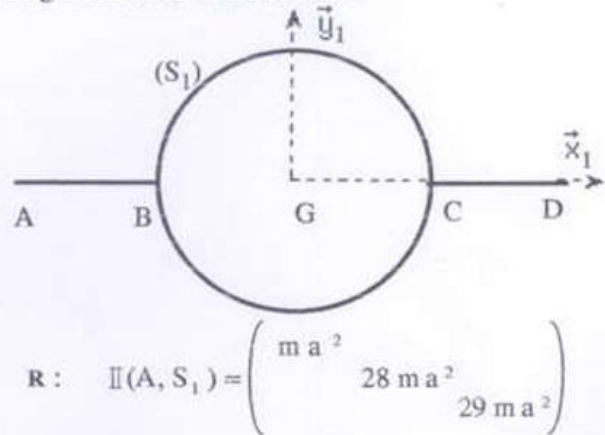
TD 1 : CINETIQUE

Exercice 1

On considère un solide (S_1) est constitué d'un anneau homogène de centre G , de rayon a et de masse $2m$ auquel sont soudées en deux points diamétralement opposés B et C deux barres homogènes identiques AB et CD de longueur a et de masse $3m/2$.

Ces barres sont dans le plan de l'anneau et disposées selon un diamètre.

Déterminer la matrice d'inertie en A de (S_1) sur la base $b_1\{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\}$



Exercice 2

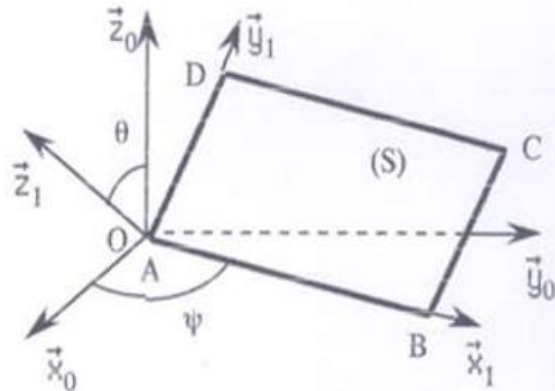
(S_1) est une plaque rectangulaire $ABCD$ homogène, de côtés $4a$ et $2a$ et de masse $3m$. On lie à (S_1) le ROND $R_1 (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ avec $\vec{AB} = 4a \vec{x}_1$ et $\vec{AD} = 2a \vec{y}_1$. (S_1) est en mouvement par rapport au ROND $R_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ de la manière suivante : A est confondu avec O et le côté AB reste dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

On pose $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ et $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$.

1- Écrire la matrice d'inertie en O de (S_1) sur la base de R_1 .

2- Écrire les composantes sur la base de R_1 du moment cinétique en O de (S_1) dans son mouvement par rapport à R_0 .

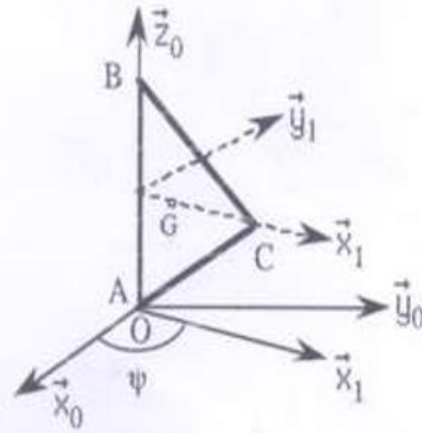
3- Déterminer l'énergie cinétique de (S_1) dans ce mouvement.



Exercice 3

Une girouette S est schématisée par une plaque plane homogène de masse m ayant la forme d'un triangle équilatéral de côté $2a$. Par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, elle tourne autour de $(O, \vec{z}_0)$ confondu avec le côté AB . On pose $\vec{\Omega}_{0S} = \dot{\psi} \vec{z}_0$.

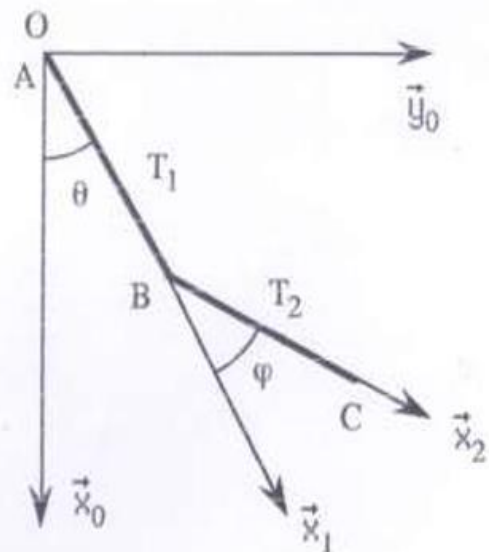
- 1- Déterminer le torseur cinétique de S
- 2- Déterminer le torseur dynamique de S

**Exercice 4**

On considère un système matériel Σ constitué de deux tiges T_1 et T_2 de même masse m et de même longueur $2a$, articulées en une extrémité commune B . Σ est en mouvement par rapport au ROND $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ de la façon suivante : l'extrémité A de T_1 est confondue avec O et Σ reste dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$. On lie à T_1 le ROND $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ et à T_2 le ROND $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$.

On pose $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ et $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$

- 1 Déterminer le moment cinétique en O de Σ
- 2 Déterminer l'énergie cinétique de Σ .



TD 2 : THOREMES GENERAUX DE LA DYNAMIQUE

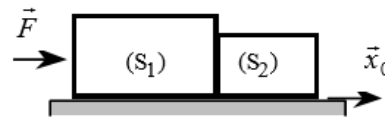
Exercice 1 - Inter-efforts entre deux solides

On considère deux solides (S_1) et (S_2) de masse m_1 et m_2 ayant la forme de parallélépipèdes rectangles. Ils sont en contact entre eux et glissent sans frottement sur une table horizontale sous l'action d'une force horizontale appliquée à (S_1) : $F\vec{x}_0$ avec $F > 0$.

L'ensemble des deux solides ayant un mouvement de translation dans la direction $\vec{x}_0$, tous les points ont la même accélération.

1- Quelle est cette accélération $\gamma\vec{x}_0$ et la résultante $\vec{F}_{12}$ entre les deux solides en fonction de F , m_1 et m_2 ?

2- Donner la valeur de γ et de $|\vec{F}_{12}|$ en prenant $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$ et $|F| = 3 \text{ N}$.



Exercice 2 - Application du TRD à un solide en rotation : Treuil

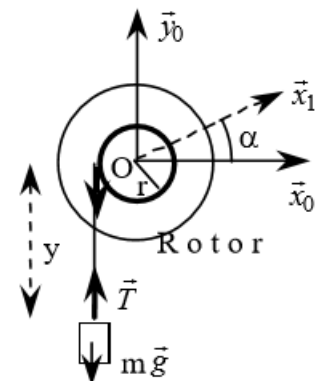
Le système représenté sur la figure comprend :

- un rotor de moment d'inertie I par rapport à son axe,
- un fil flexible inextensible s'enroulant sans glisser sur un cylindre de rayon r solidaire du rotor,
- une masse m fixée à l'extrémité libre du fil.

Le système est abandonné sans vitesse.

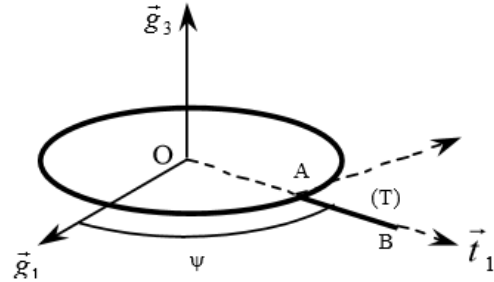
On veut déterminer la tension T dans le fil ainsi que la loi du mouvement du rotor, c'est à dire $\alpha(t)$. ($y = y_0$ quand $\alpha = 0$)

- 1- Écrire la relation entre les paramètres y et α .
- 2- Appliquer le TMD au rotor et le TRD à la masse.
- 3- Dédire des équations précédentes T et $\alpha(t)$.



Exercice 3 - Efforts à l'encastrement d'une aube de turbine

Un rotor de turbine est constitué d'un moyeu assimilé à un disque de rayon a auquel sont fixées dans le prolongement des rayons des aubes assimilées à des tiges de masse m et de longueur b . Soit (T) l'une d'entre elles, une de ses extrémités A est soudée au disque, l'autre B est libre. Le rotor tourne autour de l'axe vertical $(O, \vec{g}_3)$ d'un repère orthonormé galiléen $R_g(O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$. On pose $\psi = (\vec{g}_1, \vec{t}_1)$, $\vec{t}_1$ étant le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{AB}$ et on note t la base $\{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{g}_3\}$. On note g l'intensité du champ de pesanteur.



1-Déterminer les composantes sur la base t des éléments de réduction en A du torseur dynamique galiléen de (T) .

2-Exprimer en fonction des caractéristiques de (T) , de ψ et de ses dérivées les trois composantes sur la base t de la résultante des efforts exercées par (D) sur (T) ainsi que les trois composantes du moment en A de ces efforts.

3-Donner la valeur de ces efforts de liaison :

- au démarrage
- en régime établi sachant que la turbine atteint linéairement sa vitesse de rotation de 1500 tours par minute au bout de 5 secondes.

On donnera $a = 0,2$ m, $b = 0,6$ m et $m = 0,75$ kg.

Exercice 4 - Étude de la chute d'une tige à l'aide des théorèmes généraux

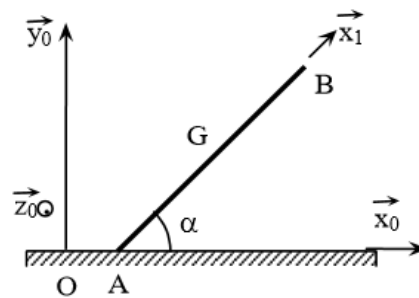
Une tige homogène (S) d'extrémités A et B , de longueur 2ℓ et de masse m , repose en A sur un sol horizontal, ce contact ayant lieu sans frottement.

On considère le ROND $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, $\vec{x}_0$ étant porté par $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{y}_0$ vertical ascendant comme galiléen. La position de la tige à l'instant t dépend de deux paramètres, l'abscisse x de son centre d'inertie G et l'angle α qu'elle fait avec l'horizontale.

On note R_1 le ROND $(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, $\vec{x}_1$ étant porté par $\overrightarrow{AB}$. On désigne par g l'intensité du champ de pesanteur et par $\vec{N}$ la réaction du sol.

À la date $t_0 = 0$ la tige est abandonnée sans vitesse dans la position $\alpha = \alpha_0$.

On désire étudier à la fois le mouvement de (S) et la réaction du sol, c'est à dire déterminer x , α et N .



1-Écrire le théorème de la résultante dynamique. En déduire la trajectoire du point G

2- Écrire le théorème du moment dynamique en G .

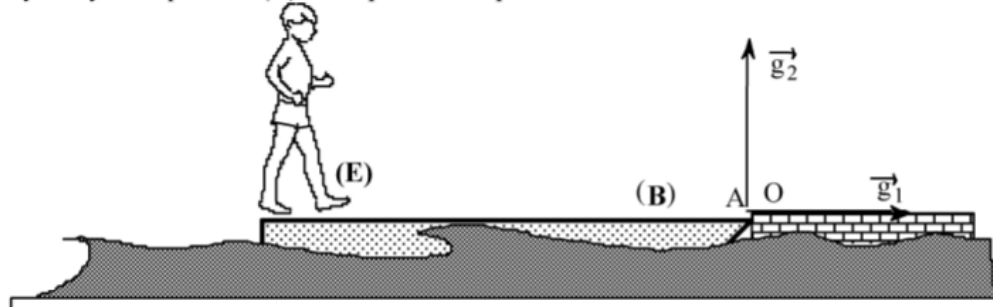
3-À l'aide des équations précédentes écrire l'équation différentielle du second ordre satisfaite par α . En multipliant les termes de cette équation par $\dot{\alpha}$ et en intégrant, obtenir une équation différentielle du premier ordre sous la forme $\alpha^2 = f(\alpha)$.

4-Exprimer N en fonction de α . Montrer qu'au cours du mouvement la tige reste en contact avec le sol.

TD 3 : THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE ET INTEGRALES PREMIERES

Exercice 1 - IP issu du TRD : déplacement d'un bateau dû au mouvement du skippe

On considère un petit bateau (B) de masse M et de longueur ℓ ayant à son bord un enfant (E) de masse m . L'avant A du bateau, qui n'est pas amarré, est en contact en O avec un quai auquel est lié le repère galiléen $R_g (O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$ avec $\vec{g}_2$ vertical ascendant. Le pont de (B) est supposé horizontal et à la même hauteur que le quai. À l'instant initial l'enfant qui est à l'arrière du bateau se déplace vers l'avant dans la direction $\vec{g}_1$. On fait l'hypothèse que les efforts hydrodynamiques sur (B) n'ont pas de composantes horizontales.



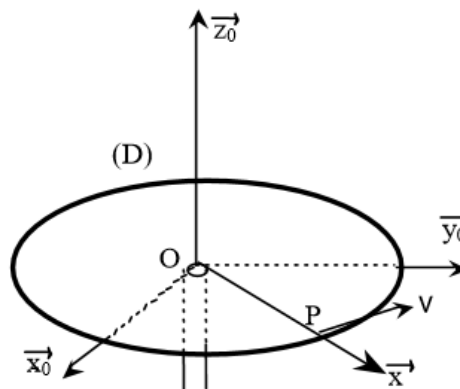
- 1- Appliquer le TRD à (E) U (B) et en déduire en fonction de m , M et ℓ l'écart d entre l'avant du bateau et le quai quand l'enfant atteint le point A.
- 2- On donne $m = 25 \text{ kg}$, $M = 50 \text{ kg}$ et $\ell = 3 \text{ m}$. Calculer d .

Exercice 2 - IP provenant du TMD : Insecte sur plateau tournant

On considère un disque homogène (D) de centre O, de rayon R et de masse M pouvant tourner librement autour de son axe par l'intermédiaire d'un pivot parfait d'axe vertical $(O, \vec{z}_0)$. Un insecte assimilé à un point P de masse m suit le bord du disque et avance à la vitesse constante v par rapport au disque. On note $\omega \vec{z}_0$ la rotation du disque. Le problème consiste à déterminer la rotation ω en fonction de v , M , m et R .

- 1- Déterminer le moment cinétique de l'ensemble du disque et de l'insecte par rapport à l'axe $(O, \vec{z}_0)$.

- 2- En supposant que l'insecte et le disque démarrent au même instant ($\omega = 0$ quand $v = 0$), déterminer ω en fonction des données en utilisant une IP issu du TMD.

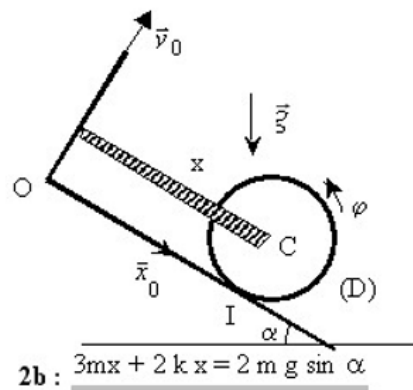


Exercice 3

Un disque (D) de centre C, de rayon a et de masse m se déplace dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, en restant en contact sans glissement avec la droite $(O, \vec{x}_0)$ faisant un angle α avec l'horizontale. On pose $\overrightarrow{OC} \cdot \vec{x}_0 = x$ et on note φ la rotation propre du disque. (D) est rappelé par un ressort de raideur k , ce ressort étant dans son état naturel lorsque C est sur l'axe $(O, \vec{y}_0)$.

Le ROND $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, est galiléen. On note $\vec{R} = T\vec{x}_0 + N\vec{y}_0$ la réaction du plan incliné sur (D) et par $\vec{g}$ l'accélération du champ de pesanteur. Le but de l'exercice est de déterminer le mouvement du disque.

- 1- Écrire la relation de roulement sans glissement
- 2- a- À l'aide des théorèmes généraux, écrire trois équations scalaires.
b-Déduire des équations précédentes l'équation régissant le mouvement en x .
- 3- a-Déterminer l'énergie cinétique de (D), la puissance de la force de rappel du ressort, la puissance due au poids et à la réaction $\vec{R}$.
b- Retrouver l'équation obtenue en 2b à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.

**Exercice 4**

Un système matériel (Σ) comprend une tige (T_1) homogène, d'extrémités A et B, de milieu G_1 , de masse m et de longueur $4a$ et une tige (T_2) homogène, d'extrémités C et D, de milieu G_2 , de masse m et de longueur $2a$.

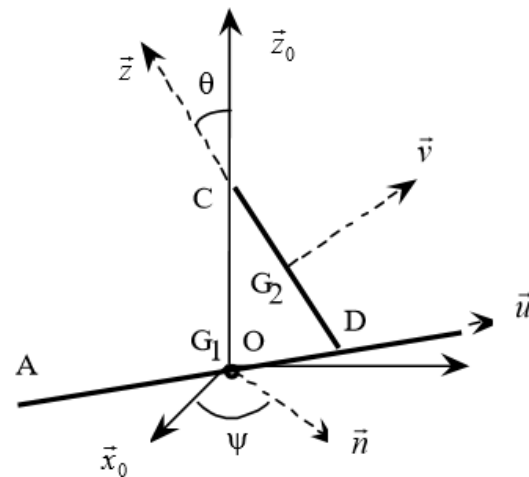
(Σ) est en mouvement par rapport à un ROND $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ de la façon suivante :

- i) $G_1 \equiv O$ et (T_1) tourne autour de $(O, \vec{z}_0)$ en restant perpendiculaire à cet axe, cette liaison se faisant sans frottement. On pose $\overrightarrow{OB} = 2a\vec{u}$ et $\psi = (\vec{x}_0, \vec{n})$
- ii) L'extrémité C de (T_2) se déplace sans frottement sur $(O, \vec{z}_0)$, l'autre D se déplace sur $(O, \vec{u})$. On pose $\overrightarrow{DC} = 2a\vec{z}$ et $\theta = (\vec{z}_0, \vec{n})$. R_0 est galiléen. (Σ) est soumis à son poids.

1- À quelle condition portant sur la liaison en D a-t-on conservation de l'énergie (IP d'énergie) mécanique de (Σ) ? Cette condition étant remplie, écrire cette équation.

2- Appliquer TMD, faites le produit scalaire avec l'axe $\vec{z}_0$ et trouver une autre équation (IP du provenant du TMD)

3- Un moteur impose à (T_1) un couple $\Gamma \vec{z}_0$ tel que $\dot{\psi} = \omega$. Déterminer à l'aide du théorème de l'énergie cinétique la valeur du couple Γ en fonction de θ , $\dot{\theta}$ et ω .



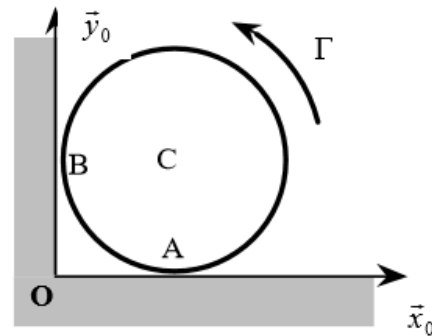
TD 4 : FROTTEMENT

Exercice 1

Un disque (D) homogène, de centre C, de rayon a et de masse m est astreint à se déplacer dans le plan vertical $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ avec $\vec{y}_0$ vertical ascendant en restant en contact au point géométrique A avec l'axe $(O, \vec{x}_0)$ et au point géométrique B avec l'axe $(O, \vec{y}_0)$.

Le coefficient de frottement identique aux deux points est noté f . On désigne par g l'accélération de la pesanteur. (D) est soumis à un couple $\Gamma \vec{z}_0$ avec $\Gamma > 0$.

Calculer la valeur maximum du couple Γ pour laquelle le disque reste en équilibre.



$$\Gamma_{\max} = m g a \frac{f(1+f)}{1+f^2}$$

Exercice 2

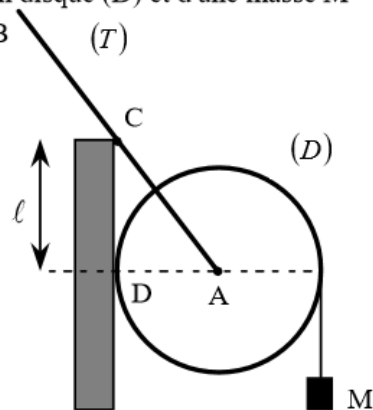
Un système matériel (Σ) est constitué d'une tige (T), d'un disque (D) et d'une masse M

- (T) homogène, d'extrémités A et B, est articulée sans frottement en son milieu C à une paroi fixe.

- (D) homogène de masse m , de rayon R , dont son centre est relié à la tige en A par une articulation pivot sans frottement, est en contact avec la paroi en D ($DC = \ell$, coefficient de frottement f).

- la masse M est liée à (D) par un fil inextensible et sans masse qui ne peut pas glisser sur le disque.

Calculer la valeur maximum de M à l'équilibre.

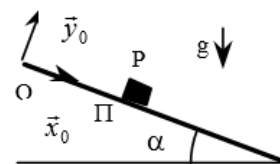


Exercice 3

On considère un petit dé schématisé par un point matériel P de masse m placé sur un plan incliné Π faisant un angle α avec un plan horizontal. On note f le coefficient de frottement de Π sur le dé. On lie au plan Π un ROND $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ avec $\vec{x}_0$ dirigé suivant la ligne de plus grande pente et $\vec{y}_0$ perpendiculaire au plan (cf figure). On note g l'accélération de la pesanteur.

1- À l'instant initial le dé est au repos. Étudier l'équilibre et le mouvement de P

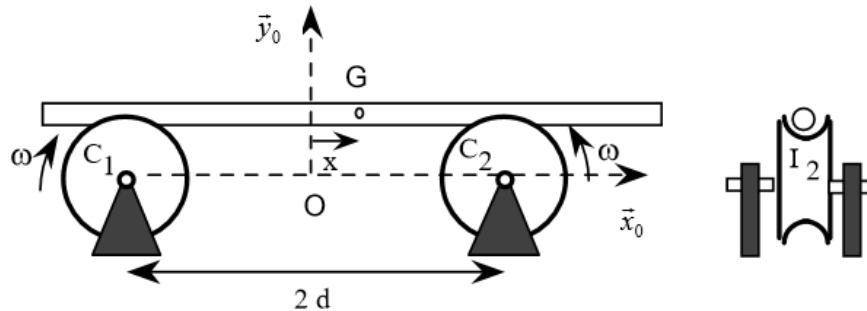
2- À l'instant initial le dé a la vitesse $V_0 \vec{x}_0$ avec V_0 négatif. Étudier le mouvement de P.



Exercice 4 Mouvement d'une barre sur deux poulies tournant en sens inverse

Une barre homogène de section circulaire, de masse m , de longueur 2ℓ et de centre de masse G est posée sur deux poulies identiques de rayon a , de centres respectivement C_1 et C_2 distants de $2d$ avec $d < \ell$. Ces poulies tournent en sens inverse à la même vitesse angulaire constante $\omega > 0$. On note f le coefficient de frottement de la barre sur les poulies en I_1 et I_2 et g l'accélération de la pesanteur.

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le ROND galiléen tel que $\vec{OC}_2 = d\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$ vertical ascendant. On pose $\vec{OG} \cdot \vec{x}_0 = x(t)$. À l'instant initial ($t = 0$) : $x = x_0 > 0$ et $\dot{x}_0 = 0$



- 1- Dénombrer et dénommer toutes les inconnues.
- 2- À l'aide des théorèmes généraux écrire trois équations scalaires.
- 3- Écrire les vitesses de glissement aux points I_1 et I_2 . Montrer qu'à l'instant initial il y a glissement de la barre sur les poulies. En déduire le signe de la composante tangentielle de l'action des poulies en I_1 et I_2 . Écrire alors les deux équations provenant de la loi de Coulomb.
- 4- Déduire des équations précédentes l'équation régissant le mouvement de la barre. Donner sa pulsation propre Ω en fonction de f , g et d . Écrire $x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)$. En déduire le sens de déplacement de la barre à l'instant initial. Calculer le temps t_1 où la barre s'arrête pour la première fois, la valeur de l'accélération à cet instant ainsi que la position de G . Qu'en conclure ?
- 5- Montrer que ω doit être supérieur à une valeur que l'on déterminera pour que le mouvement qui a pris naissance perdure.

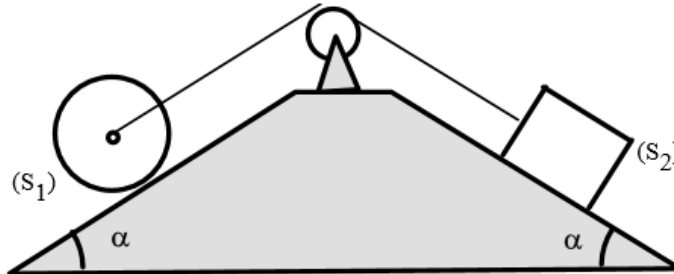
R 5 : $\omega^2 > f g d / a^2$

Exercice 5

Le système représenté sur la figure comprend un cylindre homogène (S_1) de rayon a , de masse m_1 et une caisse (S_2) de masse m_2 . Ces deux solides sont reliés par un câble inextensible passant sur une poulie et reposent sur des plans inclinés faisant le même angle α avec le plan horizontal. On désigne par g l'intensité du champ de pesanteur et par f le coefficient de

frottement de glissement commun aux deux solides. On abandonne le système sans vitesse initiale.

Le but du problème est d'écrire les deux relations liant les données m_1 , m_2 , f et α pour obtenir simultanément les mouvements suivants : la caisse monte et le cylindre roule sans glisser.



- 1- Dénombrer et dénommer toutes les inconnues.
- 2- Isoler (S_2) et écrire deux équations scalaires provenant des théorèmes généraux. Écrire l'équation provenant de la loi de Coulomb après avoir déterminé le signe de la composante tangentielle de la réaction du plan sur la caisse.
- 3- Isoler (S_1) et écrire trois équations provenant des théorèmes généraux. Écrire l'équation exprimant le roulement sans glissement du cylindre sur le plan incliné.
- 4- Dédire des équations précédentes l'expression de l'accélération prise par la caisse. Écrire une première inéquation que doivent satisfaire m_1 , m_2 , f et α pour que la caisse monte.
- 5- Écrire l'inéquation associée au roulement sans glissement du cylindre.
- 6- Montrer que le rapport m_1 / m_2 est compris entre deux valeurs dépendant de $f \cotg \alpha$.