Chapitre 4

Cinématique

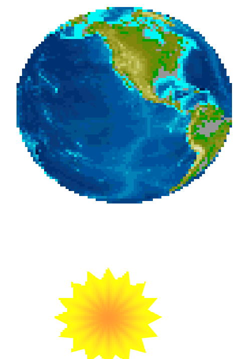
Plan

- Référentiel et Mouvement
- Vecteur Vitesse et vecteur Accélération
- Mouvements particuliers d'un Point
- Mouvement d'un solide
- Positionnement d'un solide en mouvement
- Champ des vitesses des points d'un solide
- Champ des accélérations des points d'un solide
- Composition des Mouvements

La Cinématique

- **Objectif :**
  - ✓ Savoir définir et utiliser différents référentiels pour décrire les mouvements dans l'espace-temps.
  - ✓ Savoir définir et utiliser un système de coordonnées.
  - ✓ Distinguer mouvement de rotation et de translation.
  - ✓ Savoir utiliser les concepts de trajectoire, de vitesse et d'accélération par rapport à un référentiel donné mais exprimé dans des repères différents.
- **Pré-requis :**
  - ✓ Connaître et utiliser le calcul vectoriel
  - ✓ Savoir dériver un vecteur
  - ✓ Maîtriser champ des vecteurs antisymétrique

➢ Étude du **mouvement** d’un corps en fonction du temps, indépendamment de toute cause pouvant le provoquer ou le modifier.



➢ Les **grandeurs physiques** de la cinématique sont **le temps, la position, la vitesse et l’accélération.**

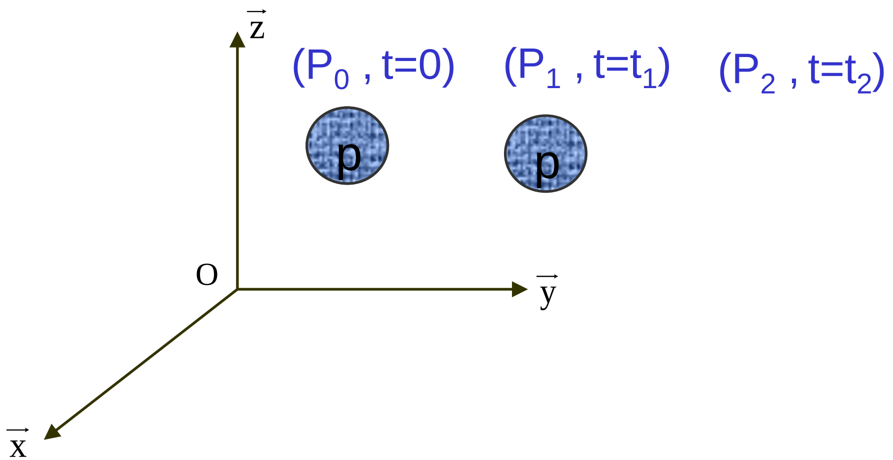
I - Référentiel et Mouvement

1) Espace-temps d'un observateur

- Les notions de repos et de mouvement sont relatives. Il est donc indispensable de savoir par rapport à quoi le mouvement a lieu.

- On se réfère à un espace physique schématisé par un espace ponctuel euclidien à 3 dimensions $\mathscr{E}$ auquel on lie un ROND $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

- Une particule p a une position P dans $\mathscr{E}$. Pour décrire le mouvement de p, il faut adjoindre à $\mathscr{E}$ un espace affine réel orienté $\mathscr{T}$ dont les éléments sont des instants. En munissant $\mathscr{T}$ d'une origine et d'une base de temps, on définit le temps t où la particule p est en P.



$\Rightarrow$ La description du mouvement d'un point matériel exige de connaître sa position dans l'espace à tout instant. Pour cela, nous devons définir :

- Un repère d'espace ou de référence
- Un repère de temps

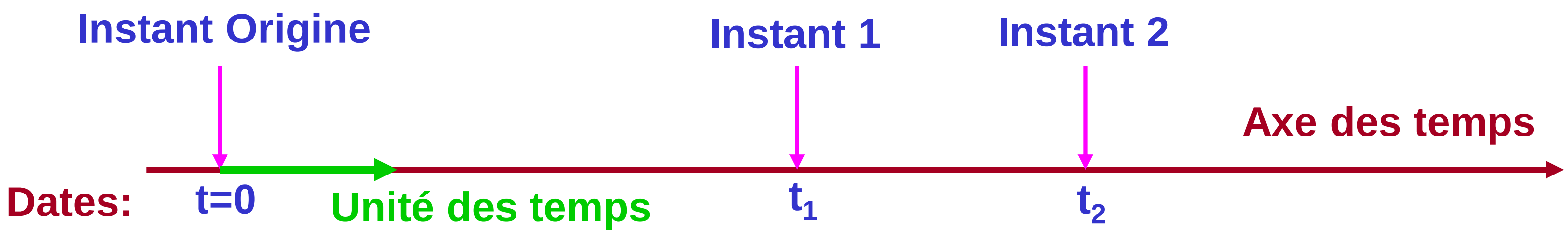
➢ *Repère d'espace ou de référence (E)*

• En cinématique, le mouvement d'un solide peut-être défini par rapport à un autre solide choisi comme référence et appelé solide de référence.

➢ *Repère de temps (T)*

• En cinématique, il faut un repère de temps c'est-à-dire une grandeur qui est la variable de temps. La durée écoulée entre 2 événements ou 2 instants est mesurée au moyen d'une horloge ou chronomètre.

Le temps peut-être schématisé par une droite:



Le repère de temps est constitué d'une origine des temps fixée par l'observateur et d'une durée unitaire fixant une chronologie. À chaque instant, on associe un nombre réel t appelé date qui correspond à la durée écoulée

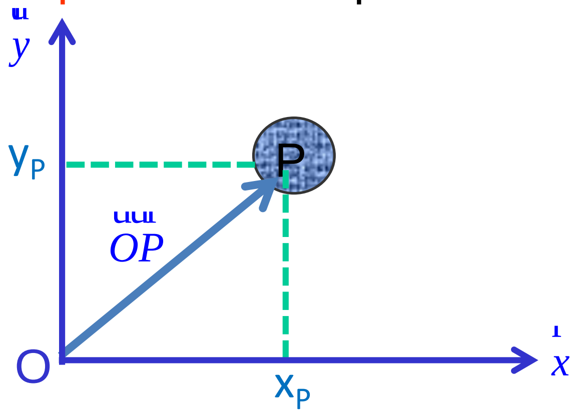
la durée δt entre les instants 1 et 2 correspond à la différence de leur date $t_2 - t_1$

L'ensemble (*E* ,*T*) est appelé espace-temps de l'observateur ou référentiel

2) Position, mouvement, trajectoire d'un point, loi du mouvement

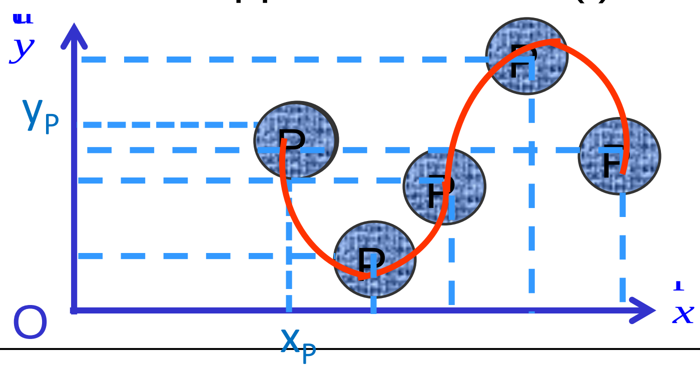
- La position de la particule p observé de $\mathcal{E}$ à l'instant t est le point P appartenant à $\mathcal{E}$ où se trouve la particule à l'instant t.

On appelle vecteur position de la particule le vecteur $\overrightarrow{OP}$



$$\overrightarrow{OP} = x_P \vec{x} + y_P \vec{y}$$

- On appelle mouvement de la particule p: la modification de la position d'un corps pendant un intervalle de temps. On attribue à la position du corps une ou plusieurs valeurs numériques (coordonnées) qui situent le corps en fonction du temps dans un référentiel $\Rightarrow$ l'application t → P(t)



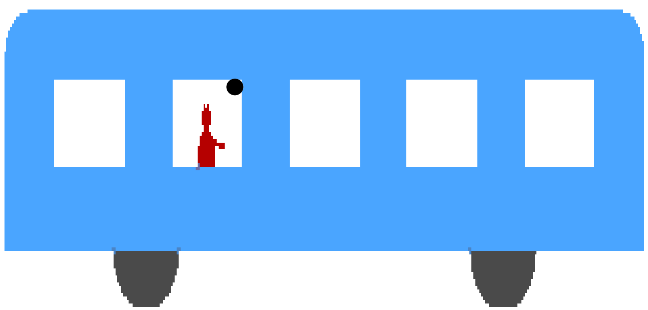
$\Rightarrow$ x et y sont les coordonnées du vecteur position ; ce sont des fonctions du temps

$$\overrightarrow{OP} = x_P(t)\vec{x} + y_P(t)\vec{y}$$

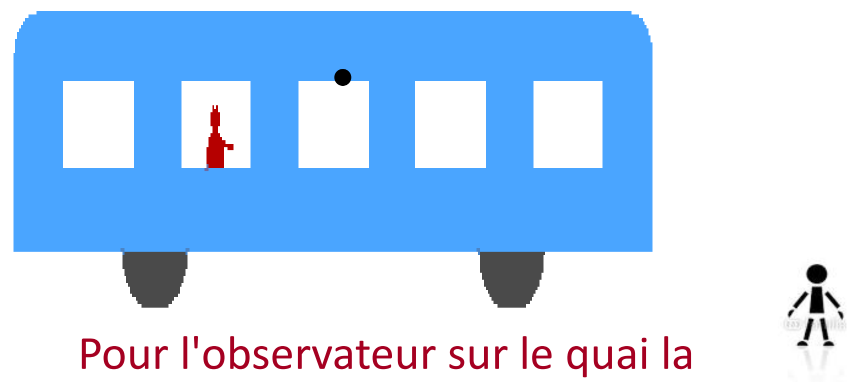
- *E* étant muni d'un ROND où O est l'origine du repère et b est sa base, la position de dans *E* est donnée par les coordonnées de P dans R, par exemple ses coordonnées cartésiennes x(t), y(t) et z(t).

- La trajectoire du point P par rapport à R est l'ensemble des positions successives de P par rapport à R. La trajectoire est donc une courbe (C) liée à R. La notion de trajectoire est relative puisqu'elle dépend du repère d'observation.

Exemple : une balle est lâchée dans un wagon qui est en mouvement par rapport à la gare.



Pour l'observateur dans le wagon le mouvement de la balle est rectiligne.



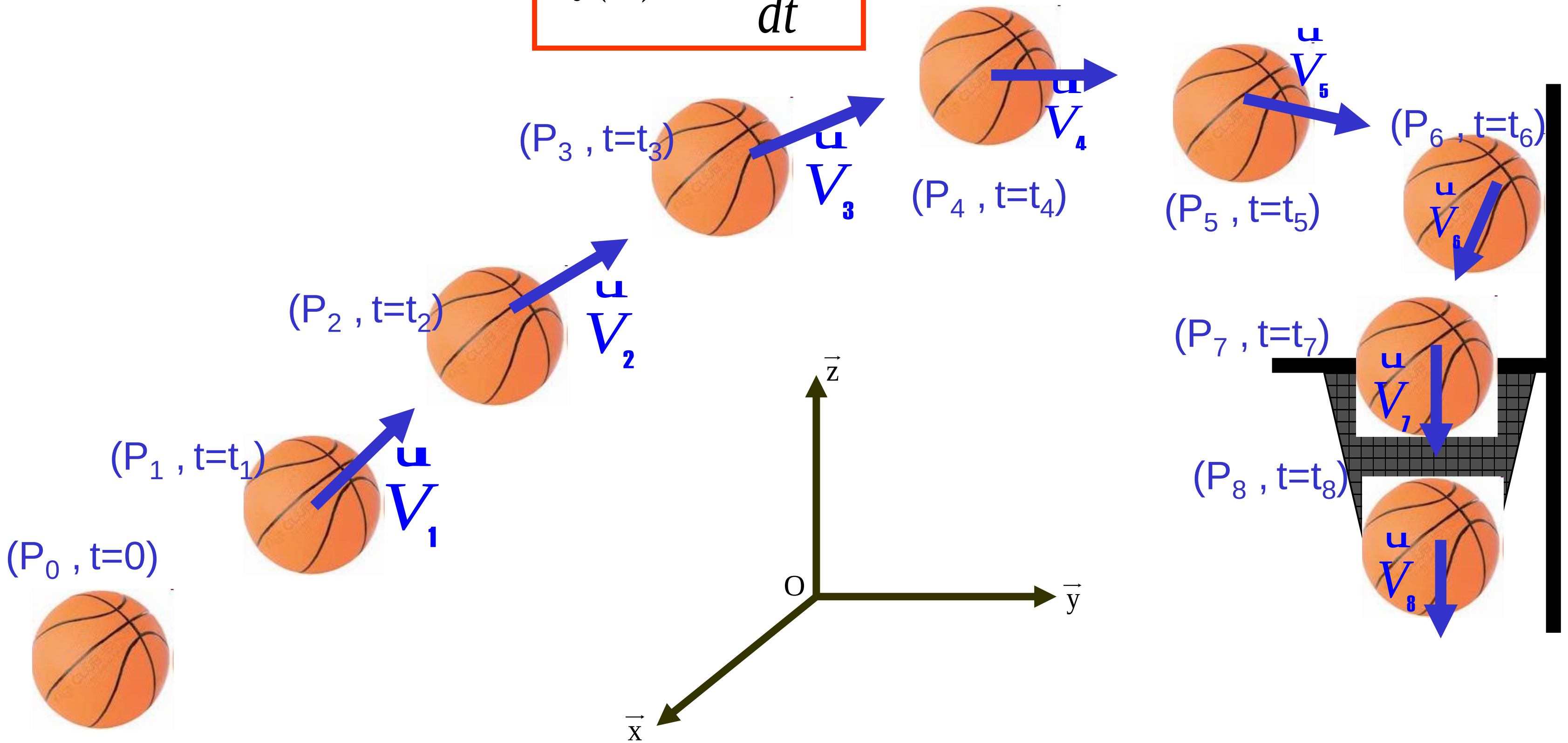
Pour l'observateur sur le quai la trajectoire de la balle est curviligne.

II – Vecteur Vitesse et Vecteur Accélération

1) Vecteur vitesse

a) On appelle vitesse instantanée ou vecteur vitesse à l'instant t du point P observé du repère R_0 l'expression suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{V_0}(P)=\frac{d_0\left(\overrightarrow{OP}\right)}{dt}}$$



⇒ Le vecteur vitesse instantané à l'instant t est caractérisé par

✓ son origine : le point où se trouve l'objet à l'instant t

✓ sa direction : tangent à la trajectoire

✓ son sens : dans le sens du mouvement

✓ sa longueur : en fonction de l'échelle choisie proportionnelle à la valeur de la vitesse.

2) Vecteur accélération

a) On appelle accélération instantanée du point P observé du repère R_0 l'expression suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{\gamma_0}(P) = \frac{d_0\vec{V}_0(P)}{dt} = \frac{d_0{}^2\left(\overrightarrow{OP}\right)}{dt^2}}$$

En résumé

- Vitesse observée d'un Repère R_0 d'un Point P

$$\boxed{\overrightarrow{V_0}(P) = \frac{d_0\left(\overrightarrow{QP}\right)}{dt}}$$

Repère d'Observation

Origine du Repère d'Observation

- Composantes sur la base b de la Vitesse observée d'un Repère R_0 d'un Point P

$$\boxed{\left(\overrightarrow{V_0}(P)\right)_b = \left(\frac{d_0\left(\overrightarrow{OP}\right)}{dt}\right)_b}$$

Base De Projection

Repère d'Observation

- Accélération observée d'un Repère R_0 d'un Point P

$$\boxed{\overrightarrow{\gamma_0}(P) = \frac{d_0\left(\overrightarrow{V_0(P)}\right)}{dt}}$$

III – Mouvements Particuliers d'un Point

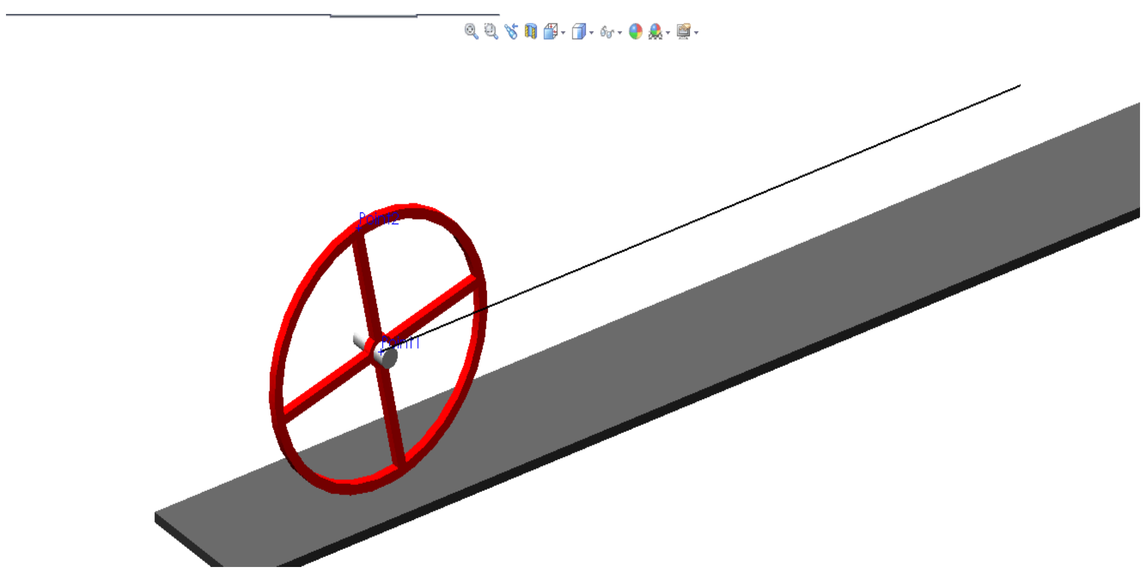
1) Mouvement à trajectoire rectiligne

La trajectoire est un segment de droite repérée par l'axe $(O,\vec{x})$. La position du point P à l'instant t est $\overline{OP} = x(t)\vec{x}$. Sa vitesse est $\vec{V}(P) = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}\vec{x}$ et son accélération est

$$\vec{\gamma}(P) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{x} = \ddot{x}\vec{x}.$$

Si la vitesse est constante, le mouvement est dit *uniforme*.

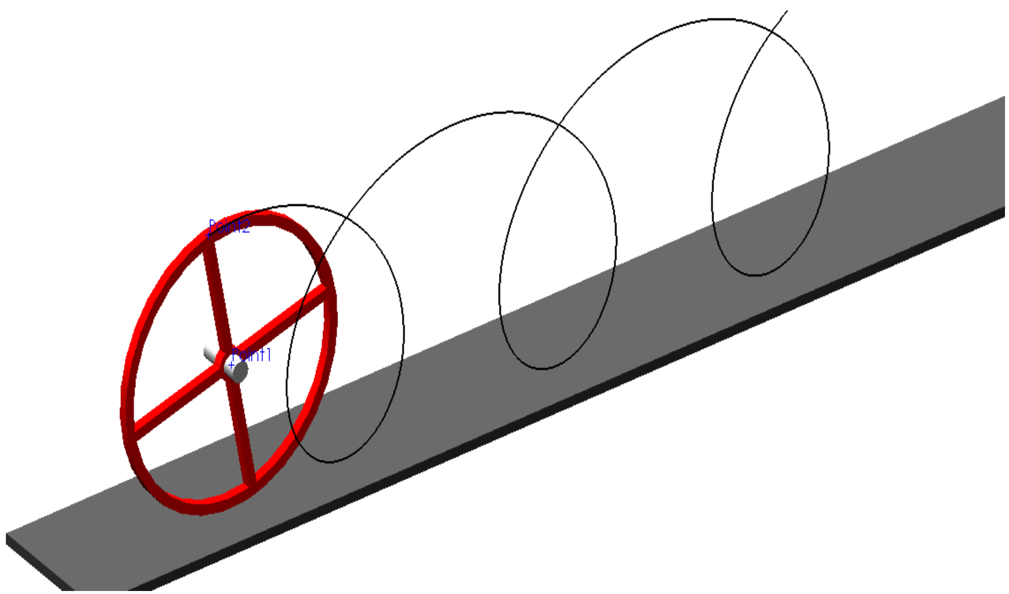
Si l'accélération est constante, le mouvement est dit *uniformément varié*.



2) Mouvement à trajectoire circulaire

- La trajectoire est un cercle ou un arc de cercle. Soir $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ par rapport auquel on observe le mouvement du point P. Soit (C) le cercle de centre O, de rayon R et d'axe $(O,\vec{z})$ et soit A le point de (C) situé sur $(O,\vec{x})$.

L'abscisse curviligne de P est $s = A\hat{P}$



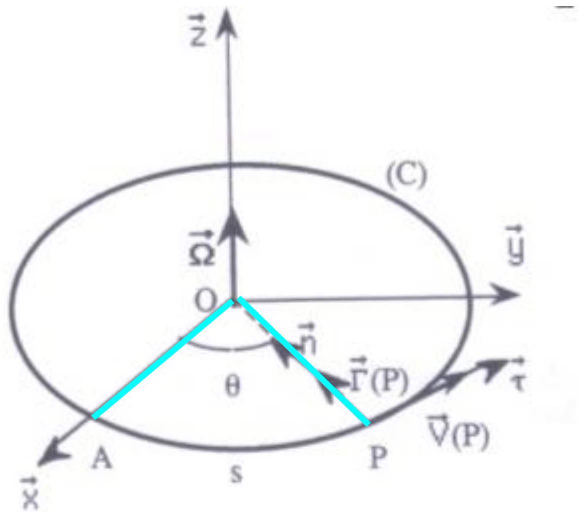
La vitesse de P est $\vec{V}(P) = \dot{s}.\vec{\tau}$ où $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent en P à (C) orienté dans le sens des s croissants avec le temps.

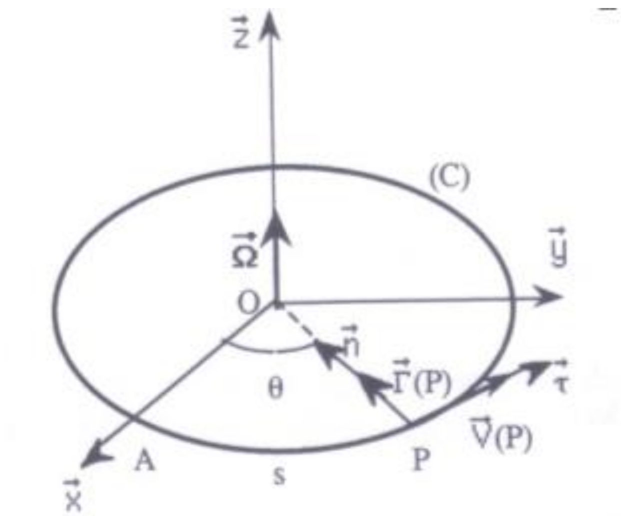
L'accélération de P est $\vec{\gamma}(P) = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à (C), dirigé vers le centre. Le rayon de courbure n'est autre que le rayon du cercle.

Le paramètre s s'exprime en fonction de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = \theta$. On peut écrire :
$s = R\theta$ où θ est fonction de t est donnée en radians. On a alors :

$$\boxed{\vec{V}(P) = R\dot{\theta}.\vec{\tau} \text{ et } \vec{\gamma}(P) = R\ddot{\theta}\vec{\tau} + R\dot{\theta}^2\vec{n}}$$

$V = R\dot{\theta}$ est la *vitesse linéaire*, $\dot{\theta}$ est la *vitesse angulaire* qui s'exprime en rad/s et $\ddot{\theta}$ est l'*accélération angulaire* qui s'exprime en rad/s^2.





Soit $\vec{\Omega}$ le vecteur défini par : $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{z}$

- On observe que : $\vec{V}(P) = R\dot{\theta}\vec{\tau}$ peut s'écrire :

$$\vec{V}(P) = \overrightarrow{PO} \wedge \vec{\Omega} = -R\vec{n} \wedge \dot{\theta}\vec{z} = -R\dot{\theta}\vec{n} \wedge \vec{z} = -R\dot{\theta}(-\vec{\tau}) = R\dot{\theta}\vec{\tau}$$

On peut donc considérer le vecteur vitesse de P comme le *moment* en P du vecteur lié $(O,\vec{\Omega})$

Ce vecteur $\vec{\Omega}$ est appelé vecteur vitesse de rotation jouera un rôle fondamental en cinématique du solide.

IV – Mouvement d'un solide

- Un ensemble de particules est appelé système. On le note Σ, par exemple (particules gazeuses, une tige….).
- Le mouvement de Σ résulte des mouvements de chacune de ses particules.

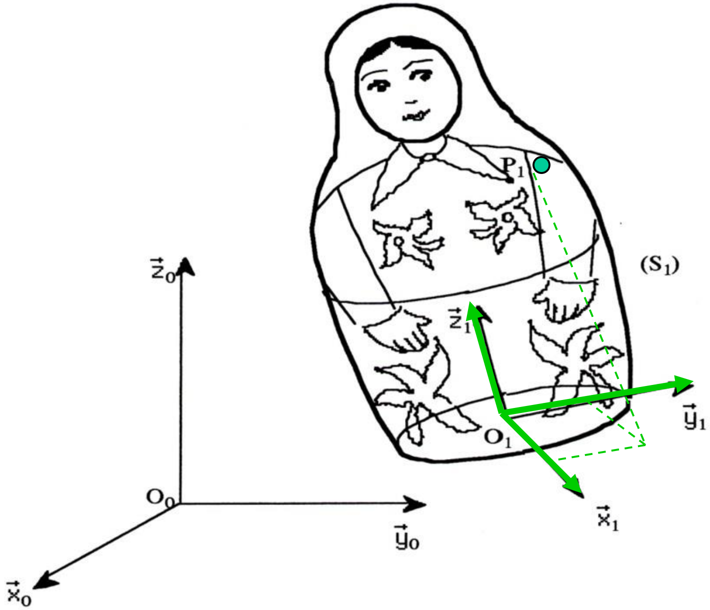
- Dans ce cours on traite les solides rigides ou indéformables.
- Dans ce cas les mouvements de ses points *ne sont pas indépendants*.

- Un solide en mouvement est un système en mouvement tel que quelles que soient les particules p et q, la distance de leur position respective P(t) et Q(t) est *indépendante du temps*.

$$\overrightarrow{P(t)Q(t)} = \overrightarrow{P(t_0)Q(t_0)} \qquad \forall t$$

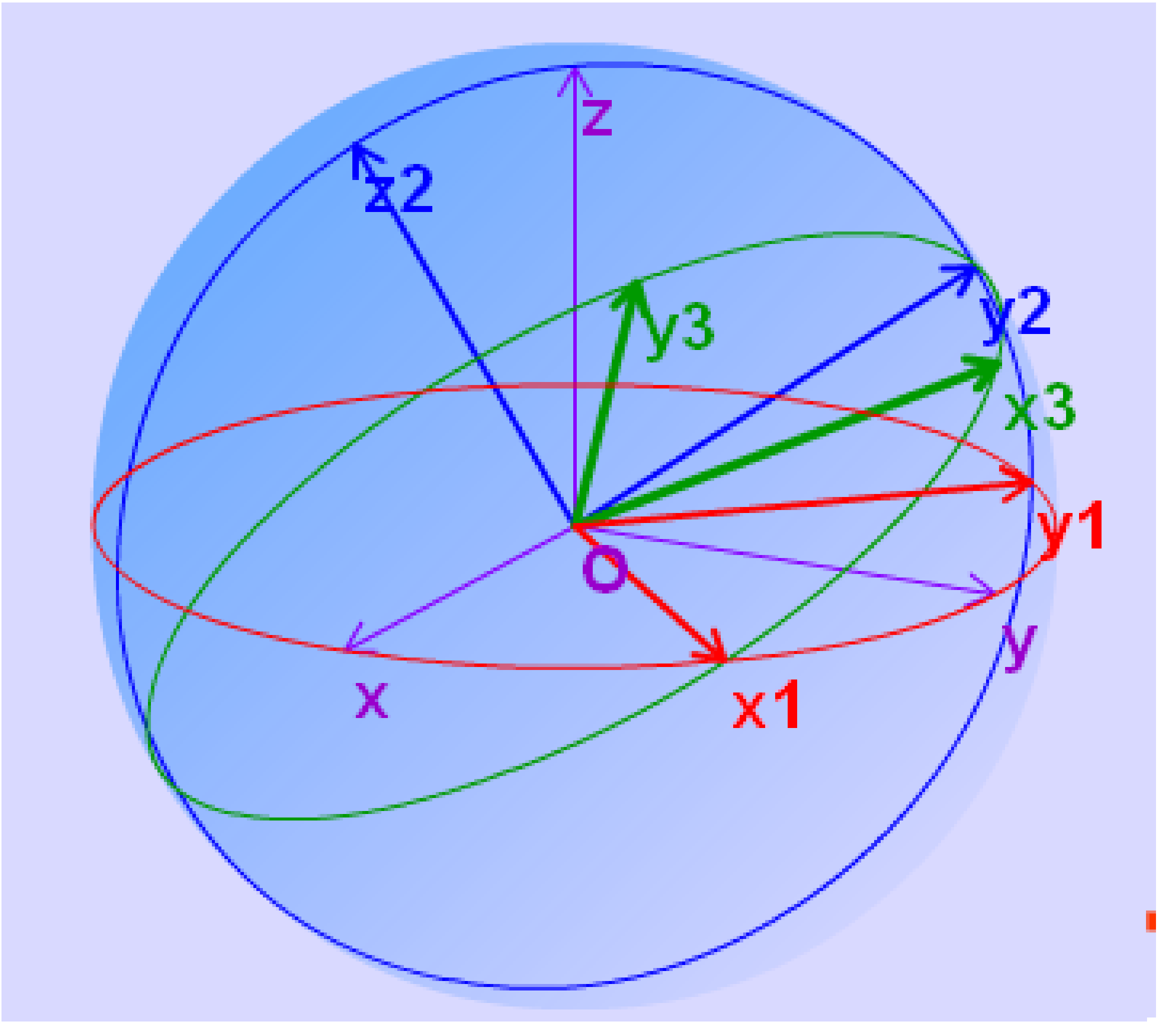
V – Positionnement d'un solide en mouvement

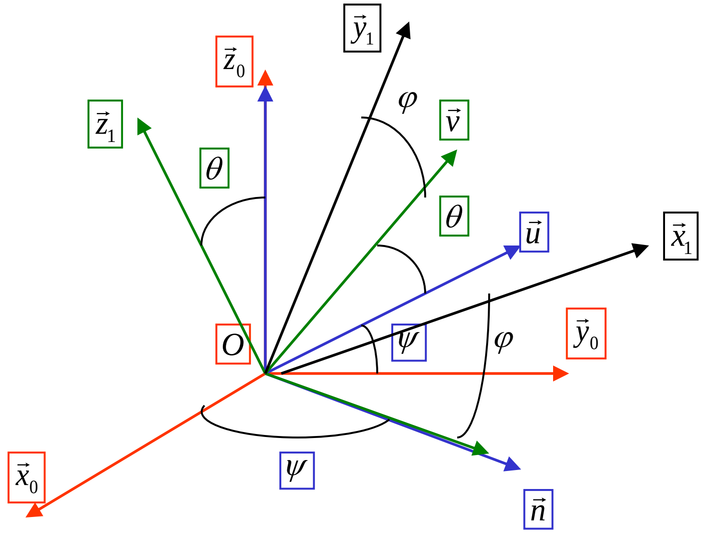
Soit $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère orthonormé lié à S_1 . On observe le mouvement de S_1 de l'espace $\mathcal{E}_0$ muni du repère orthonormé direct $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.



Soit P_1 un point de S_1. Ses coordonnées cartésiennes ξ, η, ζ sont <u>constantes</u> dans le repère R_1 lié à S_1. Pour positionner le solide S_1 par rapport au repère R_0 il faut donc :

- <u>situer l'origine</u> O_1 du repère R_1 par rapport au repère R_0, en se donnant par exemple ses coordonnées cartésiennes x(t), y(t), z(t) dans le repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- <u>orienter la base</u> $\{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\}$ par rapport à la base $\{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$. On réalise cette orientation grâce à trois angles appelés angles d'Euler.

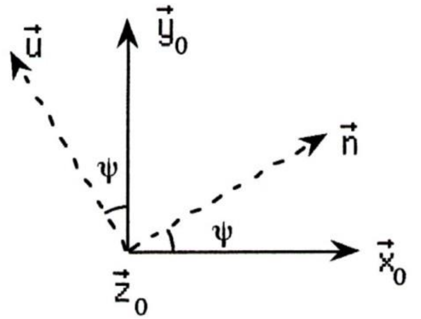

z
z2
y3
y2
x3
y1
O
y
x
x1



- Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tel que la base $\{\vec{n}, \vec{u}, \vec{z}_0\}$ soit orthonormée directe et soit R_u le repère $(O, \vec{n}, \vec{u}, \vec{z}_0)$.

Posons $\psi = (\vec{x}_0, \vec{n})$ mesuré positivement sur $\vec{z}_0$.

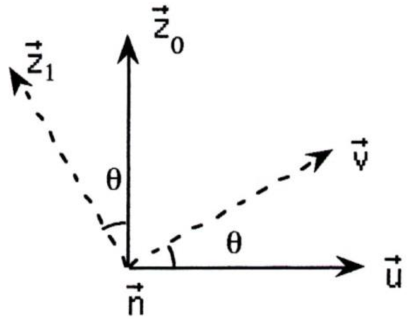
On passe de R_0 à R_u par la rotation $(O, \psi\, \vec{z}_0)$.



- Soit $\vec{v}$ le vecteur unitaire tel que la base $\{\vec{n}, \vec{v}, \vec{z}_1\}$ soit orthonormée directe et soit R_v le repère $(O, \vec{n}, \vec{v}, \vec{z}_1)$.

Posons $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ mesuré positivement sur $\vec{n}$.

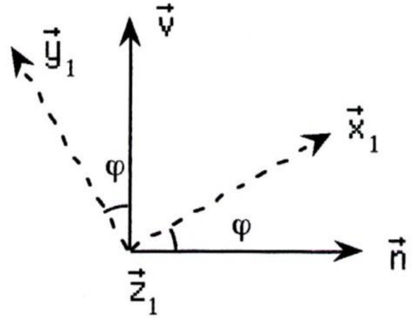
On passe de R_u à R_v par la rotation $(O, \theta\,\vec{n})$.



Posons $\varphi = (\vec{n}, \vec{x}_1)$ mesuré positivement sur $\vec{z}_1$.

On passe de R_v à R_1 par la rotation $(O, \varphi\,\vec{z}_1)$.

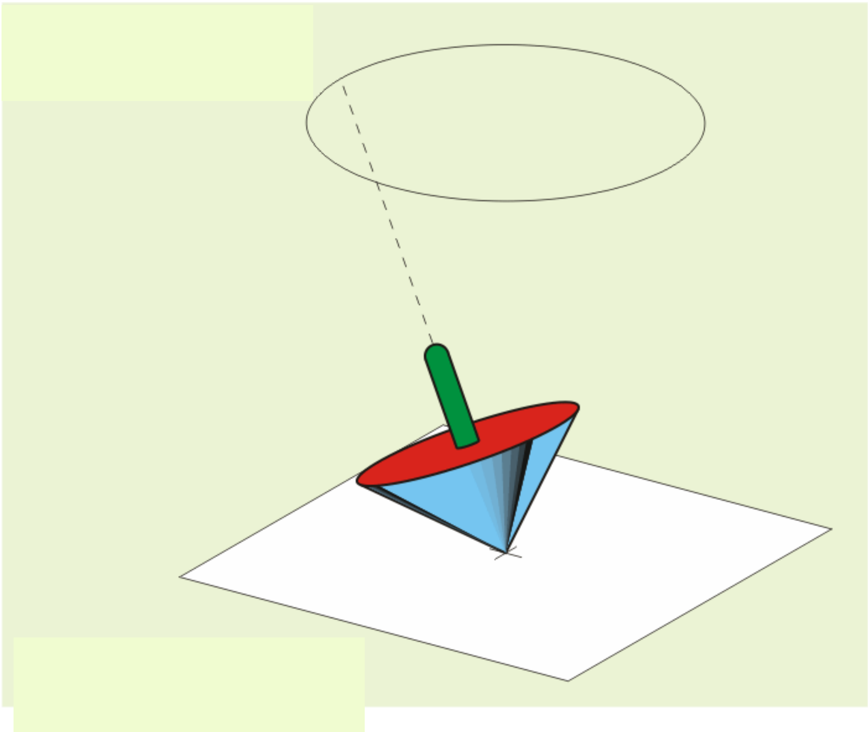
Dans cette rotation $(O, \vec{v})$ viendra nécessairement sur $(O,\vec{y}_1)$, $\{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\}$ étant une base orthonormée directe.



On a le schéma suivant :

$$R_0\,(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow[\psi\,\vec{z}_0]{} R_u\,(0, \vec{n}, \vec{u}, \vec{z}_0) \xrightarrow[\theta\,\vec{n}]{} R_v\,(O, \vec{n}, \vec{v}, \vec{z}_1) \xrightarrow[\varphi\,\vec{z}_1]{} R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$$

<u>Exemple</u> : Le mouvement d'une toupie permet de visualiser les angles d'Euler : l'angle que fait l'axe de la toupie avec la verticale est l'angle θ, le mouvement de l'axe autour de la verticale est le mouvement de précession (angle ψ) et bien sûr la rotation de la toupie sur "elle-même" est la rotation propre (angleφ).



VI – Champ des vitesses des Points d'un solide

Soient P(t) et Q(t) les positions, à l'instant t, de deux points quelconques d'un solide S en mouvement par rapport à un espace $\mathcal{E}_0$. On a donc :

$$\overrightarrow{P(t)\,Q(t)}^2 = C$$

où C est une constante.

En dérivant cette relation scalaire par rapport au temps dans $\mathcal{E}_0$, on a :

$$2\,\overrightarrow{PQ} \cdot \frac{d\overrightarrow{PQ}}{dt} = 0$$

Soit O un point de $\mathcal{E}_0$:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = 0$$

ou encore :

$$\boxed{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{V}(Q) = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{V}(P)}$$

quels que soient P et Q liés à S.

Le champ des vitesses des points d'un solide est donc équiprojectif ou, ce qui revient au même, antisymétrique. C'est donc un torseur appelé **torseur cinématique** ou distributeur des vitesses. On le note $[\underset{\rightarrow}{\mathcal{C}}]$.

Il existe donc un vecteur que l'on note $\vec{\Omega}$ tel que :

$$\boxed{\vec{V}(Q) = \vec{V}(P) + \vec{QP} \wedge \vec{\Omega} \qquad \forall \text{ P et Q lié à S}}$$

Plus précisément, si on désigne par $\mathcal{E}_1$ le repère lié au solide S en mouvement par rapport à $\mathcal{E}_0$, on notera son torseur cinématique $[\mathcal{C}_{01}]$ $\begin{cases} \vec{\Omega}_{01} \\ \vec{V}_0(P) \end{cases}$

Le vecteur de ce torseur $\vec{\Omega}_{01}$ est appelé **vecteur vitesse de rotation.**

Son moment en P lié à S, $\vec{V}_0(P)$ ou $\vec{V}_{01}(P)$, est la **vitesse de P** observée de $\mathcal{E}_0$.

$$\vec{\Omega}_{OS} = \dot{\psi}\vec{z}_O + \dot{\theta}\vec{n} + \dot{\varphi}\vec{z} \qquad \text{(3 Angles d'Euler)}$$

VII – Champ des accélérations des Points d'un solide

Dérivons par rapport au temps dans $\mathcal{E}_0$ les deux membres de la formule (1) liant les vitesses de deux points d'un solide :

On obtient :

$$\vec{\Gamma}_0(Q) = \vec{\Gamma}_0(P) + \frac{d_0\,\vec{\Omega}_{01}}{dt} \wedge \overrightarrow{PQ} + \vec{\Omega}_{01} \wedge \frac{d_0\,\overrightarrow{PQ}}{dt}$$

Or :

$$\frac{d_0\,\overrightarrow{PQ}}{dt} = \vec{\Omega}_{01} \wedge \overrightarrow{PQ} \qquad \text{car } \overrightarrow{PQ} \text{ est lié à S}$$

d'où :

$$\vec{\Gamma}_0(Q) = \vec{\Gamma}_0(P) + \frac{d_0\,\vec{\Omega}_{01}}{dt} \wedge \overrightarrow{PQ} + \vec{\Omega}_{01} \wedge (\vec{\Omega}_{01} \wedge \overrightarrow{PQ})$$

On remarque que le champ des accélérations des points d'un solide n'est pas un torseur.

$$\frac{d_0\,\overrightarrow{PQ}}{dt} = \vec{\Omega}_{01} \wedge \overrightarrow{PQ} \qquad \text{car } \overrightarrow{PQ} \text{ est lié à S}$$

- Dérivée d'un vecteur

A et B sont deux points de (S) : $\boxed{\dfrac{d_0\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt} = \overrightarrow{\Omega}_{0S} \wedge \overrightarrow{AB}}$

preuve :

$$\frac{d_0\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt} = \frac{d_0\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)}{dt}$$

$$= \overrightarrow{V_0}(B) - \overrightarrow{V_0}(A)$$

$$= \left(\overrightarrow{V_0}(A) + \overrightarrow{\Omega}_{0S} \wedge \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{V_0}(A)\right)$$

$$= \overrightarrow{\Omega}_{0S} \wedge \overrightarrow{AB}$$

<u>Cas particuliers</u> : $\dfrac{d_0\vec{x}_1}{dt} = \overrightarrow{\Omega}_{01} \wedge \vec{x}_1 \qquad \dfrac{d_0\vec{y}_1}{dt} = \overrightarrow{\Omega}_{01} \wedge \vec{y}_1 \qquad \dfrac{d_0\vec{z}_1}{dt} = \overrightarrow{\Omega}_{01} \wedge \vec{z}_1$

Résumé

- Vitesse observée d'un Repère R_0 d'un Point P

$$\boxed{\overrightarrow{V_0}(P) = \frac{d_0\left(\overrightarrow{QP}\right)}{dt}}$$

Repère d'Observation

Origine du Repère d'Observation

- Composantes sur la base b de la Vitesse observée d'un Repère R_0 d'un Point P

$$\boxed{\left(\overrightarrow{V_0}(P)\right)_b = \left(\frac{d_0\left(\overrightarrow{OP}\right)}{dt}\right)_b}$$

Base De Projection

Repère d'Observation

- Accélération observée d'un Repère R_0 d'un Point P

$$\boxed{\overrightarrow{\gamma_0}(P) = \frac{d_0\left(\overrightarrow{V_0(P)}\right)}{dt}}$$

- Vitesse observée d'un Repère R_0 d'un Point P (cas où le point P appartient à un solide (S) :

$$\boxed{\overrightarrow{V_0}(P)=\overrightarrow{V_0}(A)+\overrightarrow{PA}\wedge\overrightarrow{\Omega_{0S}} \quad \forall(A,P)\in(S)}$$

Relation de transport des vitesses

$$\boxed{\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{V_0}(A)=\overrightarrow{PA}.\,\overrightarrow{V_0}(P)\ \forall(A,P)\in(S)}$$

Relation d'équiprojectivité

Remarque : Si R1 est le repère qui est lié au solide $\overrightarrow{\Omega_{0S}}=\overrightarrow{\Omega_{01}}$

- Dérivée d'un vecteur

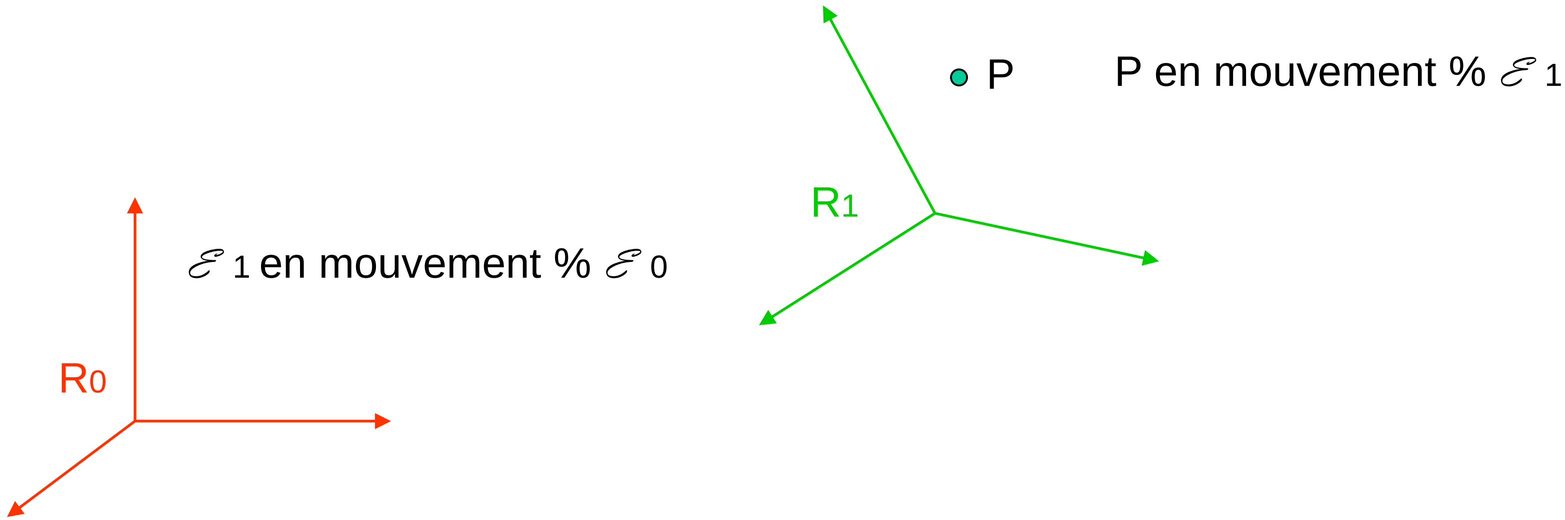
A et B sont deux points de (S) : $\boxed{\dfrac{d_0\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt}=\overrightarrow{\Omega_{0S}}\wedge\overrightarrow{AB}}$

$$\frac{d_0\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt}=\frac{d_0\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)}{dt}=\overrightarrow{V_0}(B)-\overrightarrow{V_0}(A)=\left(\overrightarrow{V_0}(A)+\overrightarrow{\Omega_{0S}}\wedge\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{V_0}(A)\right)=\overrightarrow{\Omega_{0S}}\wedge\overrightarrow{AB}$$

Cas particuliers : $\dfrac{d_0\vec{x}_1}{dt}=\overrightarrow{\Omega_{01}}\wedge\vec{x}_1 \qquad \dfrac{d_0\vec{y}_1}{dt}=\overrightarrow{\Omega_{01}}\wedge\vec{y}_1 \qquad \dfrac{d_0\vec{z}_1}{dt}=\overrightarrow{\Omega_{01}}\wedge\vec{z}_1$

VIII Composition des Mouvements

1) Qualification des différents mouvements

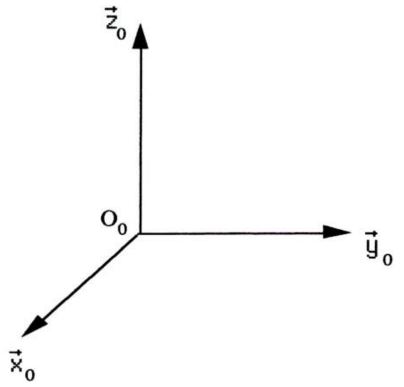


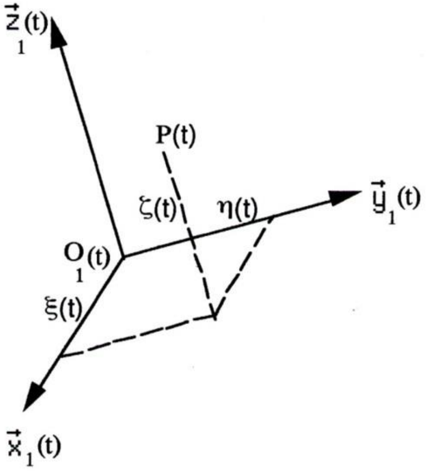
- Le mouvement de P observé de $\mathcal{E}_0$ est appelé mouvement absolu. L'espace $\mathcal{E}_0$ est lui même qualifié d'absolu.
- Le mouvement de P observé de $\mathcal{E}_1$ est appelé mouvement relatif. L'espace $\mathcal{E}_1$ est lui même qualifié de relatif.
- Le mouvement de $\mathcal{E}_1$ par rapport à $\mathcal{E}_0$ est appelé mouvement d'entraînement.

2) Composition des Vitesses

Soient $R_0(O_0,b_0)$ et $R_1(O_1,b_1)$ les repères liés aux espaces $\mathscr{E}_0$ et $\mathscr{E}_1$.

On pose $b_1=\{\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1\}$ et on note $\xi(t),\eta(t),\varsigma(t)$ les coordonnées de P(t) dans R_1.





$$\overrightarrow{O_0P}(t)=\overrightarrow{O_0O_1}(t)+\overrightarrow{O_1P}(t)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{O_0P}(t)=\overrightarrow{O_0O_1}(t)+\xi(t)\overrightarrow{x_1}(t)+\eta(t)\overrightarrow{y_1}(t)+\varsigma(t)\overrightarrow{z_1}(t)$$

$$\overrightarrow{V_0}(P)=\frac{d_0}{dt}\left(\overrightarrow{O_0P}(t)\right)=\frac{d_0}{dt}\left(\overrightarrow{O_0O_1}(t)+\xi(t)\overrightarrow{x_1}(t)+\eta(t)\overrightarrow{y_1}(t)+\varsigma(t)\overrightarrow{z_1}(t)\right)$$

$$\Rightarrow \vec{V}_0(P) = \vec{V}_0(O_1) + \frac{d_0}{dt}\left(\xi(t)\vec{x}_1(t) + \eta(t)\vec{y}_1(t) + \varsigma(t)\vec{z}_1(t)\right) \qquad \text{(A)}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_0(P) = \underbrace{\vec{V}_0(O_1) + \xi(t)\frac{d_0\vec{x}_1}{dt} + \eta(t)\frac{d_0\vec{y}_1(t)}{dt} + \varsigma(t)\frac{d_0\vec{z}_1(t)}{dt}}_{\boxed{1}} + \underbrace{\dot{\xi}(t)\vec{x}_1(t) + \dot{\eta}(t)\vec{y}_1(t) + \dot{\varsigma}(t)\vec{z}_1(t)}_{\boxed{2}}$$

- La vitesse $\vec{V}_0(P)$ est la vitesse absolue de P, notée $\vec{V}_a(P)$.

- Le second terme est la vitesse de P observé de R1, en effet :

$$\overrightarrow{O_1P}(t) = \xi(t)\vec{x}_1(t) + \eta(t)\vec{y}_1(t) + \varsigma(t)\vec{z}_1(t)$$

$$\Rightarrow \vec{V}_1(P) = \frac{d_1\overrightarrow{O_1P}(t)}{dt} = \dot{\xi}(t)\vec{x}_1(t) + \dot{\eta}(t)\vec{y}_1(t) + \dot{\varsigma}(t)\vec{z}_1(t)$$

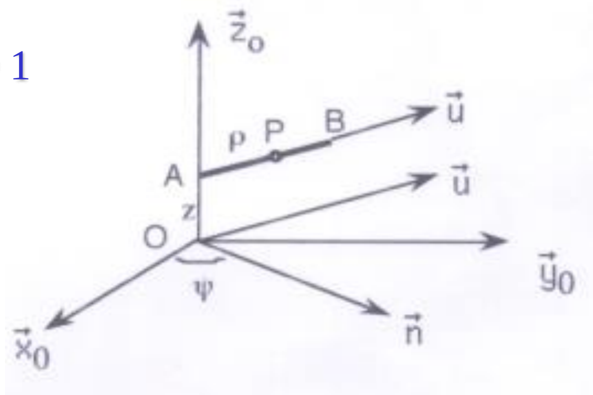
cette vitesse est la vitesse relative $\vec{V}_r(P)$

- Le premier terme peut être interprété comme le calcul de (A) si, ξ, η , ζ sont *constants*. On le note $\vec{V}_0(P \in \mathcal{E}_1)$.

Cette vitesse serait nulle si $\mathcal{E}$1 était lié à $\mathcal{E}$0 => Cette vitesse rend compte de la contribution du mouvement de $\mathcal{E}$ 1 par rapport à $\mathcal{E}$ 0 appelé mouvement d'entraînement. Cette vitesse est appelé vitesse d'entraînement et notée $\vec{V}_e(P)$

- Enfin, $\vec{V}_0(P) = \vec{V}_a(P) = \vec{V}_r(P) + \vec{V}_e(P)$

Exemple : Exercice 4 du TD 1



Calcul en utilisant la méthode directe $\vec{V}_0(P) = \dfrac{d_0\left(\overrightarrow{OP}\right)}{dt}$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = z\vec{z}_0 + \rho\vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_0(P) = \frac{d_0}{dt}\left(z\vec{z}_0 + \rho\vec{u}\right) \Rightarrow \vec{V}_0(P) = \dot{z}\vec{z}_0 + \dot{\rho}\vec{u} + \rho\frac{d_0\vec{u}}{dt} = \dot{z}\vec{z}_0 + \dot{\rho}\vec{u} - \rho\dot{\psi}\vec{n} \qquad \Rightarrow \left(\vec{V}_0(P)\right)_u = \begin{pmatrix} -\rho\dot{\psi} \\ \dot{\rho} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

Calcul en utilisant la composition des vitesses $\vec{V}_0(P) = \vec{V}_r(P) + \vec{V}_e(P)$

$$*\vec{V}_r(P) = \vec{V}_u(P) = \frac{d_u\left(\overrightarrow{AP}\right)}{dt} = \frac{d_u}{dt}(\rho\vec{u}) = \dot{\rho}\vec{u}$$

$$*\vec{V}_e(P) = \vec{V}_0(P \in R_u) = \vec{V}_0(A) + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{\Omega}_{0u} \quad or \ \vec{V}_0(A) = \frac{d_0\left(\overrightarrow{OA}\right)}{dt} = \frac{d_0\left(z\vec{z}_0\right)}{dt} = \dot{z}\vec{z}_0 \qquad et \ \vec{\Omega}_{0u} = \dot{\psi}\vec{z}_0$$

$$\Rightarrow \vec{V}_e(P) = \dot{z}\vec{z}_0 - \rho\vec{u} \wedge \dot{\psi}\vec{z}_0 = \dot{z}\vec{z}_0 - \rho\dot{\psi}\vec{n}$$

$$Enfin, \vec{V}_0(P) = \vec{V}_r(P) + \vec{V}_e(P) = \dot{\rho}\vec{u} + \dot{z}\vec{z}_0 - \rho\dot{\psi}\vec{n} \qquad \text{CQFD}$$

3) Composition des Accélérations

On a : $\vec{V}_0(P)=\vec{V}_0(O_1)+\xi(t)\dfrac{d_0\vec{x}_1}{dt}+\eta(t)\dfrac{d_0\vec{y}_1(t)}{dt}+\varsigma(t)\dfrac{d_0\vec{z}_1(t)}{dt}+\dot{\xi}(t)\vec{x}_1(t)+\dot{\eta}(t)\vec{y}_1(t)+\dot{\varsigma}(t)\vec{z}_1(t)$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_0(P)=\frac{d_0\left(\vec{V}_0(P)\right)}{dt}=\frac{d_0}{dt}\left[\vec{V}_0(O_1)+\xi(t)\frac{d_0\vec{x}_1}{dt}+\eta(t)\frac{d_0\vec{y}_1(t)}{dt}+\varsigma(t)\frac{d_0\vec{z}_1(t)}{dt}+\dot{\xi}(t)\vec{x}_1(t)+\dot{\eta}(t)\vec{y}_1(t)+\dot{\varsigma}(t)\vec{z}_1(t)\right]$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_0(P)=\vec{\gamma}_0(O_0)+\dot{\xi}(t)\frac{d_0\vec{x}_1}{dt}+\dot{\eta}(t)\frac{d_0\vec{y}_1(t)}{dt}+\dot{\varsigma}(t)\frac{d_0\vec{z}_1(t)}{dt}+\xi(t)\frac{d_0^{\,2}\vec{x}_1}{dt}+\eta(t)\frac{d_0^{\,2}\vec{y}_1(t)}{dt}+\varsigma(t)\frac{d_0^{\,2}\vec{z}_1(t)}{dt}$$

$$+\ddot{\xi}(t)\vec{x}_1(t)+\ddot{\eta}(t)\vec{y}_1(t)+\ddot{\varsigma}(t)\vec{z}_1(t)+\dot{\xi}(t)\frac{d_0\vec{x}_1}{dt}+\dot{\eta}(t)\frac{d_0\vec{y}_1(t)}{dt}+\dot{\varsigma}(t)\frac{d_0\vec{z}_1(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_0(P)=\overbrace{\vec{\gamma}_0(O_0)+\xi(t)\frac{d_0^{\,2}\vec{x}_1}{dt}+\eta(t)\frac{d_0^{\,2}\vec{y}_1(t)}{dt}+\varsigma(t)\frac{d_0^{\,2}\vec{z}_1(t)}{dt}}^{\text{❷}}+\overbrace{\ddot{\xi}(t)\vec{x}_1+\ddot{\eta}(t)\vec{y}_1(t)+\ddot{\varsigma}(t)\vec{z}_1(t)}^{\text{❶}}$$

$$\underbrace{+2\left[\dot{\xi}(t)\frac{d_0\vec{x}_1}{dt}+\dot{\eta}(t)\frac{d_0\vec{y}_1(t)}{dt}+\dot{\varsigma}(t)\frac{d_0\vec{z}_1(t)}{dt}\right]}_{\text{❸}}$$

Donc, $\boxed{\vec{\gamma}_0(P)=\vec{\gamma}_a(P)=\vec{\gamma}_r(P)+\vec{\gamma}_e(P)+\vec{\gamma}_c(P)}$

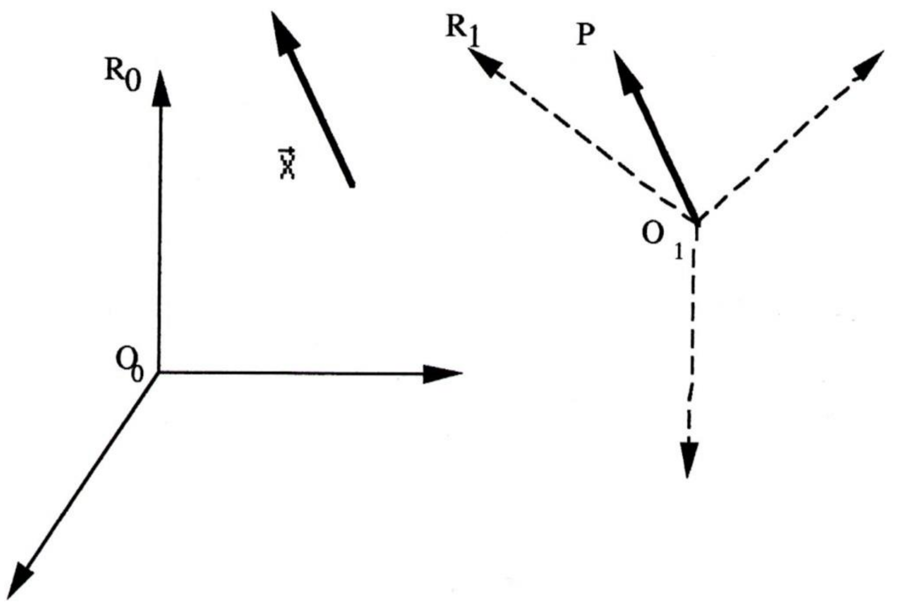
On peut écrire l'accélération complémentaire ou de Coriolis comme suit,

$\vec{\gamma}_c(P)=2\left[\dot{\xi}(t)\vec{\Omega}_{01}\wedge\vec{x}_1+\dot{\eta}(t)\vec{\Omega}_{01}\wedge\vec{y}_1(t)+\dot{\varsigma}(t)\vec{\Omega}_{01}\wedge\vec{z}_1(t)\right]\Rightarrow\vec{\gamma}_c(P)=2\vec{\Omega}_{01}\wedge\vec{V}_r(P)$

4) Formule de changement de base dérivation

Soit $\vec{X}(t)$ un vecteur variable aussi bien par rapport à l'espace $\mathscr{E}_0$ muni du repère $R_0(O_0,b_0)$ que par rapport à l'espace $\mathscr{E}_1$ muni du repère $R_1(O_1,b_1)$.

Soit P le point tel que, à tout instant, $\overrightarrow{O_1P} = \vec{X}$



$$*\overrightarrow{V_0}(P)=\frac{d_0\left(\overrightarrow{O_0P}\right)}{dt}=\frac{d_0\left(\overrightarrow{O_0O_1}+\overrightarrow{O_1P}\right)}{dt}=\overrightarrow{V_0}(O_1)+\frac{d_0\left(\overrightarrow{O_1P}\right)}{dt}$$

$$*\overrightarrow{V_0}(P)=\overrightarrow{V_r}(P)+\overrightarrow{V_e}(P)=\left[\overrightarrow{V_1}(P)\right]+\left[\overrightarrow{V_0}(P\in\mathcal{E}_1)\right]=\left[\frac{d_1\left(\overrightarrow{O_1P}\right)}{dt}\right]+\left[\overrightarrow{V_0}(O_1)+\overrightarrow{PO_1}\wedge\overrightarrow{\Omega}_{01}\right]=\overrightarrow{V_0}(O_1)+\frac{d_1\left(\overrightarrow{O_1P}\right)}{dt}+\overrightarrow{\Omega}_{01}\wedge\overrightarrow{O_1P}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{V_0}(P)=\cancel{\overrightarrow{V_0}(O_1)}+\frac{d_0\left(\overrightarrow{O_1P}\right)}{dt}=\cancel{\overrightarrow{V_0}(O_1)}+\frac{d_1\left(\overrightarrow{O_1P}\right)}{dt}+\overrightarrow{\Omega}_{01}\wedge\overrightarrow{O_1P}\qquad\Rightarrow\frac{d_0\left(\overrightarrow{O_1P}\right)}{dt}=\frac{d_1\left(\overrightarrow{O_1P}\right)}{dt}+\overrightarrow{\Omega}_{01}\wedge\overrightarrow{O_1P}$$

ou encore, $$\boxed{\frac{d_0\left(\overrightarrow{X}\right)}{dt}=\frac{d_1\left(\overrightarrow{X}\right)}{dt}+\overrightarrow{\Omega}_{01}\wedge\overrightarrow{X}}$$

exemple $$\left(\overrightarrow{V_0}(P)\right)_u=\begin{pmatrix}-\rho\dot\psi\\ \dot\rho\\ \dot z\end{pmatrix}\qquad\left(\overrightarrow{\gamma_0}(P)\right)_u=?$$

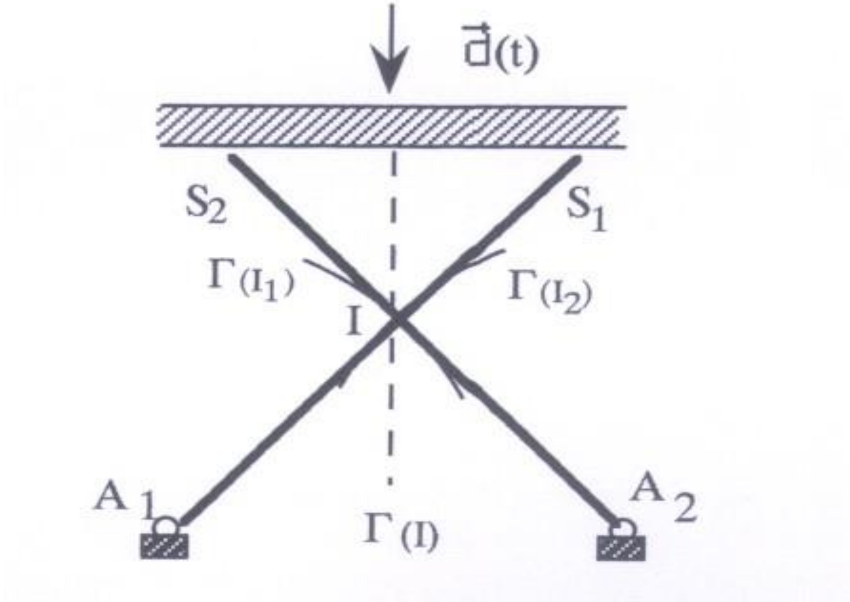
$$*\overrightarrow{V_0}(P)=\dot\rho\vec u+\dot z\vec z_0-\rho\dot\psi\vec n\Rightarrow\overrightarrow{\gamma_0}(P)=\ddot\rho\vec u+\dot\rho\frac{d_0\vec u}{dt}+\ddot z\vec z_0-\left(\dot\rho\dot\psi+\rho\ddot\psi\right)\vec n-\rho\dot\psi\frac{d_0\vec n}{dt}$$
$$=\ddot\rho\vec u+\dot\rho\left(-\dot\psi\vec n\right)+\ddot z\vec z_0-\left(\dot\rho\dot\psi+\rho\ddot\psi\right)\vec n-\rho\dot\psi\left(\dot\psi\vec u\right)\Rightarrow\left(\overrightarrow{\gamma_0}(P)\right)_u=\begin{pmatrix}-2\dot\rho\dot\psi-\rho\ddot\psi\\ -\rho\dot\psi^2+\ddot\rho\\ \ddot z\end{pmatrix}$$

$$*\left(\overrightarrow{\gamma_0}(P)\right)_u=\left(\frac{d_0\left(\overrightarrow{V_0}(P)\right)}{dt}\right)_u=\left(\frac{d_u\left(\overrightarrow{V_0}(P)\right)}{dt}\right)_u+\left(\overrightarrow{\Omega}_{0u}\wedge\overrightarrow{V_0}(P)\right)_u\Rightarrow\left(\overrightarrow{\gamma_0}(P)\right)_u=\begin{pmatrix}-\dot\rho\dot\psi-\rho\ddot\psi\\ \ddot\rho\\ \ddot z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dot\psi\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-\rho\dot\psi\\ \dot\rho\\ \dot z\end{pmatrix}$$

4) Contact ponctuel entre deux solides

- Deux solides (S_1) et (S_2) en mouvement l'un par rapport à l'autre sont en contact ponctuel si, pour tout instant t il existe un point I_1 de (S_1) et un point I_2 de (S_2) qui occupent la même position I.

I_1 et I_2 sont appelés points coïncidents.
I est appelé point géométrique



- On appelle vitesse de glissement de (S_2) sur (S_1), à l'instant t, le vecteur vitesse du point I_2 observée de (S_1).

$$\overrightarrow{U}_{12} = \overrightarrow{V}_1(I_2)$$

Soit O_2 un point de (S_2), la vitesse de glissement peut s'écrire

$$\overrightarrow{U}_{12} = \overrightarrow{V}_1(I_2) = \overrightarrow{V}_1(O_2) + \overrightarrow{I_2O_2} \wedge \vec{\Omega}_{12}$$

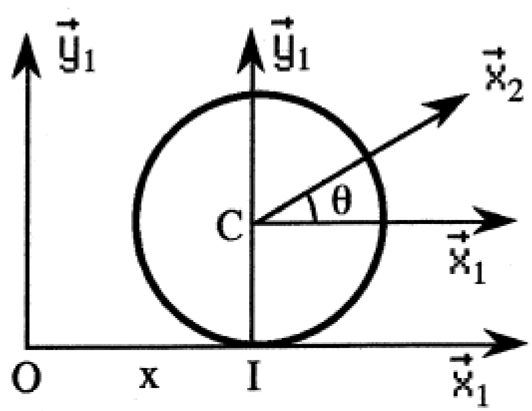
<u>Propriétés :</u> $\overrightarrow{U}_{12} = -\overrightarrow{U}_{21}$ $\qquad$ $\overrightarrow{U}_{12} = \overrightarrow{V}_1(I_2) - \overrightarrow{V}_1(I_1) = \overrightarrow{V}_0(I_2) - \overrightarrow{V}_0(I_1)$

- Il y a mouvement sans glissement de (S_2) sur (S_1) pendant un certain laps de temps si, pour tout instant t de cette durée, le vecteur vitesse de glissement de (S_2) sur (S_1) est nul.

$$\overrightarrow{U}_{12} = \vec{0}$$

Exemple d'application du contact sans glissement

Considérons un disque de centre C et de rayon R roulant sans glisser sur un axe horizontal $(O, \vec{x}_1)$. Soit $(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ le repère orthonormé direct lié au disque avec $\vec{z}_2$ normal au plan du disque. Le mouvement de (S_2) est défini par les deux paramètres $x(t) = \overrightarrow{OC}.\vec{x}_1$ et $\theta(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.



Notons I le point géométrique de contact de (S_2) avec $(O, \vec{x}_1)$ et $\vec{\Omega}_{12}$ son vecteur vitesse de rotation

$$\begin{aligned}\vec{V}_1(I_2) &= \vec{V}(C) + \vec{\Omega}_{12} \wedge \overrightarrow{CI}_2 \\ &= \dot{x}\,\vec{x}_1 + \dot{\theta}\,\vec{z}_2 \wedge (-R\,\vec{y}_1) \\ &= (\dot{x} + R\,\dot{\theta})\,\vec{x}_1\end{aligned}$$

La condition de contact sans glissement s'écrit : $\dot{x} + R\,\dot{\theta} = 0$